Principes de Mathématiques 12

Examen provincial – Janvier 2002

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes		Domaines
1. La résolution de problèmes	A	Série de problèmes
2. Les relations et leurs représentations	B	Suites et séries géométriques
	C/D	Logarithmes et exposants
	C/D	Trigonométrie
3. Le plan et l'espace	E	Coniques
	F	Transformations
4. Statistiques et probabilités	G	Analyse combinatoire
	G	Probabilités
	G	Statistiques

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	S	CO	RAP	Q	K	C	S	CO	RAP
1.	D	K	1,5	2	C3	23.	A	K	1,5	3	E2
2.	C	K	1,5	2	D6	24.	D	U	1,5	3	E1
3.	B	U	1,5	2	C4	25.	D	U	1,5	3	E1
4.	B	U	1,5	2	D5	26.	D	H	1,5	3	E2
5.	C	U	1,5	2	D6	27.	B	K	1,5	3	F1
6.	D	U	1,5	2	C8	28.	C	U	1,5	3	F3
7.	C	U	1,5	2	C7	29.	B	U	1,5	3	F2; F3
8.	B	H	1,5	2	C8	30.	D	H	1,5	3	F4
9.	A	U	1,5	2	C5	31.	A	H	1,5	3	F3
10.	A	H	1,5	2	D7	32.	A	K	1,5	4	G7
11.	C	K	1,5	2	B1	33.	C	U	1,5	4	G8
12.	A	U	1,5	2	B1; B2	34.	A	U	1,5	4	G6
13.	C	U	1,5	2	B1	35.	B	H	1,5	4	G5
14.	D	U	1,5	2	B3	36.	C	K	1,5	4	G11
15.	C	H	1,5	2	B3	37.	C	K	1,5	4	G11
16.	B	K	1,5	2	D2	38.	B	U	1,5	4	G12
17.	D	U	1,5	2	D3	39.	D	H	1,5	4	G13
18.	A	U	1,5	2	D1	40.	A	U	1,5	4	G1
19.	B	U	1,5	2	C1	41.	C	U	1,5	4	G2
20.	C	U	1,5	2	D4	42.	C	U	1,5	1	A1
21.	D	U	1,5	2	C2	43.	B	U	1,5	1	A1; A4
22.	B	H	1,5	2	C2	44.	D	H	1,5	1	A1

Questions à choix multiple = 66 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	CO	RAP
1	1	U	5	3	E3
2a.	2	U	1	4	G9; G11
2b.	3	U	1	4	G9; G11
2c.	4	U	1	4	G9; G11
2d.	5	U	1	4	G9; G11
2e.	6	U	1	4	G9; G11
3.	7	U	5	2	D1; D3
4.	8	U	5	2	C6
5a.	9	U	2	3	F1; F2; F3; F5; F6
5b.	10	U	2	3	F1; F2; F3; F5; F6
5c.	11	U	1	3	F1; F2; F3; F5; F6
6.	12	H	5	1	A1
7.	13	U	4	4	G3

Questions à développement = 34 points

Questions à choix multiple = 66 (44 questions)
Questions à développement = 34 (7 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 100 points

LÉGENDE :
Q = Numéro de la question **K** = Réponse **C** = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note **S** = Note **CO** = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrit

1. Transformez l'équation suivante sous forme standard (canonique) :

$$9x^2 - 16y^2 - 36x - 96y - 252 = 0$$ **(5 points)**

solution

$$\left(9x^2 - 36x\right) - \left(16y^2 + 96y\right) = 252 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$9\left(x^2 - 4x + \quad\right) - 16\left(y^2 + 6y + \quad\right) = 252 \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$9\left(x^2 - 4x + 4\right) - 16\left(y^2 + 6y + 9\right) = 252 + \underset{\uparrow}{36} - \underset{\uparrow}{144}$$

1 point chacun

$$9(x-2)^2 - 16(y+3)^2 = 144 \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$\frac{9(x-2)^2}{144} - \frac{16(y+3)^2}{144} = \frac{144}{144}$$

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y+3)^2}{9} = 1 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

2. Un dé tétraédrique a quatre côtés numérotés 1, 2, 3 et 4. Deux dés tétraédriques sont lancés. L'espace-échantillon est représenté ci-dessous.

2^{e} dé

1er dé		**1**	**2**	**3**	**4**
	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)
	3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)

Déterminez la probabilité :

a) que la somme des deux dés soit 6. **(1 point)**

solution

$\frac{3}{16}$ ← **1 point**

b) que le produit des deux dés soit un multiple de 3. **(1 point)**

solution

$\frac{7}{16}$ ← **1 point**

c) que le chiffre du premier dé soit plus grand que le chiffre du deuxième dé.

(1 point)

solution

$\frac{6}{16}$ $\leftarrow$ **1 point**

d) que la somme des deux dés soit 6 ou que le produit des deux dés soit un multiple de 3. **(1 point)**

solution

$\frac{9}{16}$ $\leftarrow$ **1 point**

e) que le chiffre du premier dé soit un 4 lorsque la somme des deux dés est 6. **(1 point)**

solution

$\frac{1}{3}$ $\leftarrow$ **1 point**

3. Le strontium 90 est une substance radioactive avec un demi-vie de 28 jours. Combien de jours faut-il pour qu'un échantillon de 200 grammes de strontium 90 soit réduit à 8 grammes suite à la désintégration ? (Résolvez algébriquement à l'aide de logarithmes.) **(5 points)**

solution

½ point — **1 point**

$$200(0,5)^{\frac{t}{28}} = 8$$

$$(0,5)^{\frac{t}{28}} = 0,04 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\log(0,5)^{\frac{t}{28}} = \log(0,04) \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$\frac{t}{28}\log(0,5) = \log(0,04) \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$t = \frac{28\log(0,04)}{\log(0,5)} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$t = 130,03 \text{ jours} \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

autre solution

$$0,5 = e^{28k} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\ln 0,5 = 28k$$

$$\frac{\ln 0,5}{28} = k$$

$$8 = 200e^{\frac{\ln 0,5}{28}t} \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$0,04 = e^{\frac{\ln 0,5}{28}t} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\ln 0,04 = \frac{\ln 0,5}{28}t \qquad \leftarrow 1\tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\frac{28\ln 0,04}{\ln 0,5} = t \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$130,03 \text{ jours} = t \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

Notez: 5 points seront accordés pour la réponse 130 jours.

4. Résolvez $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ algébriquement sur l'ensemble des nombres réels.
(Donnez la valeur exacte de la solution générale.) **(5 points)**

solution

$$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\leftarrow$ **1 point** $\qquad$ $\cos x = -1$ $\leftarrow$ **1 point**

$x = \frac{\pi}{3}$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point** $\qquad$ $x = \pi$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$x = \frac{5\pi}{3}$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{3} + 2n\pi \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \\ x &= \frac{5\pi}{3} + 2n\pi \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \end{aligned}\right\} \ \textbf{ou} \quad 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$x = \pi + 2n\pi$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

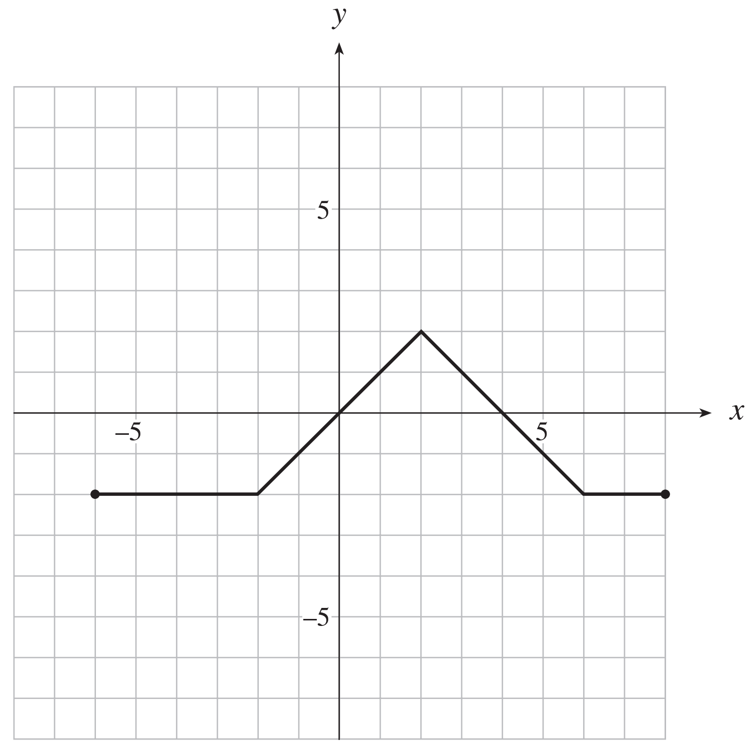
(n étant un nombre entier quelconque)

ou $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}n$ $\leftarrow$ **1 $\frac{1}{2}$ point**

Notez: Les correcteurs n'enlèveront aucun point si l'élève n'indique pas que n est un nombre entier.

Notez: Si une élève fournit une solution graphique, elle peut obtenir une note partielle si elle fournit une solution générale en fonction de n.

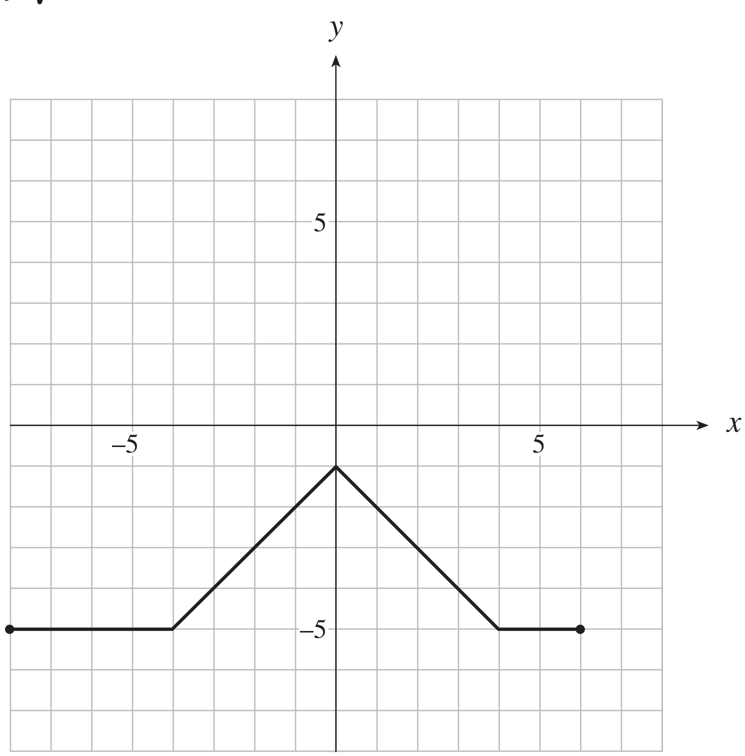
5. Le graphe de $y = f(x)$ est représenté ci-dessous.



Sur les systèmes d'axes suivants, esquissez les graphes de :

a) $y = f(x+2) - 3$ **(2 points)**

solution

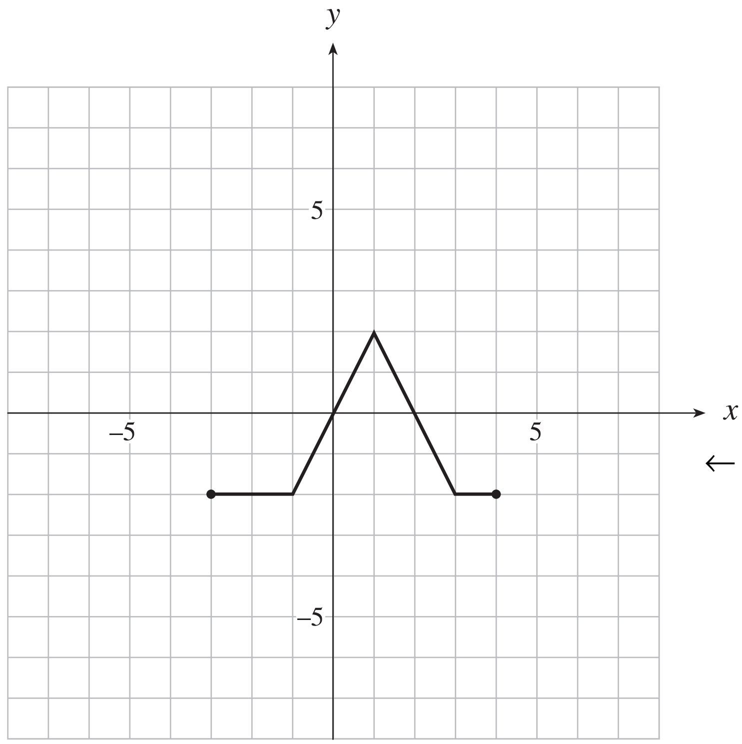


← **1 point** pour 2 unités vers la gauche

← **1 point** pour 3 unités vers le bas

b) $y = f(2x)$	**(2 points)**

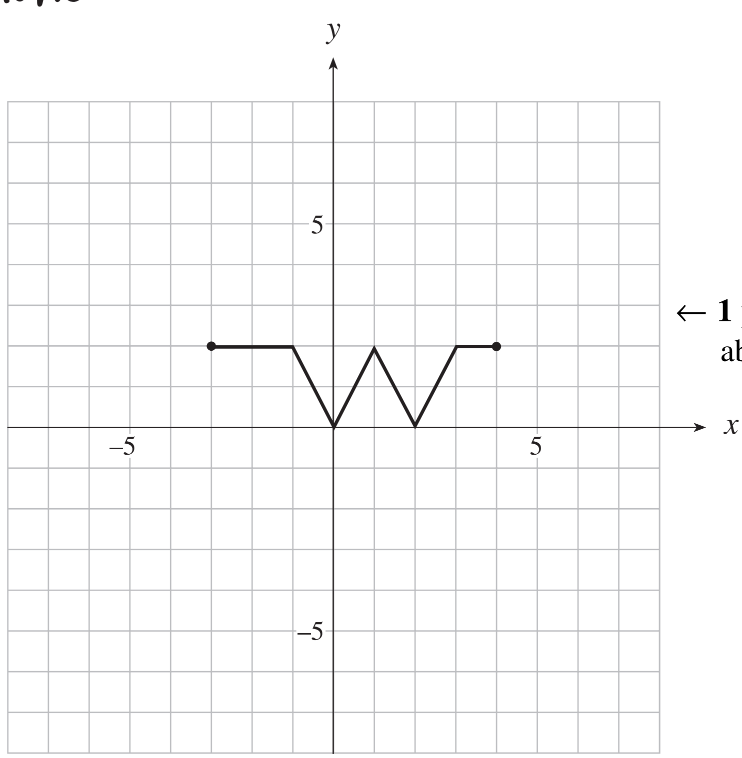
solution



← **2 points** pour la compression horizontale

c) $y = \left| f(2x) \right|$	**(1 point)**

solution



← **1 point** pour avoir pris la valeur absolue de la fonction dans la partie b)

6. Dans une suite, si $t_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1}$, déterminez la valeur de t_4 si $x = 3$. **(5 points)**

solution

$$t_4 = \left.\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1} \right\} \leftarrow \begin{array}{l}\textbf{1 point pour } n = 4 \\ \textbf{1 point pour } x = 3\end{array}$$

$$= \overbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27}}^{\textbf{1 point}} + \overbrace{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27}}^{\textbf{1 point}}$$

$$= 2 + \frac{2}{9}$$

$$= 2\frac{2}{9} \text{ ou } \frac{20}{9} \text{ ou } 2{,}22 \quad \leftarrow \textbf{1 point}$$

autre solution

$$t_4 = \left.\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{k-1} + \sum_{k=1}^{4}\left(-\frac{1}{x}\right)^{k-1} \right\} \leftarrow \textbf{1 point pour } n = 4$$

$$= \overbrace{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}^{\textbf{1 point}} + \overbrace{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}}^{\textbf{1 point}}$$

$$= 2 + \frac{2}{x^2}$$

$$= 2 + \frac{2}{3^2} \quad \leftarrow \textbf{1 point} \text{ pour } x = 3$$

$$= 2\frac{2}{9} \text{ ou } \frac{20}{9} \text{ ou } 2{,}22 \quad \leftarrow \textbf{1 point}$$

7. Dans une ville, la probabilité qu'une élève de douzième année ait un emploi à mi-temps est de 0,40. Utilisez l'approximation normale du binôme pour déterminer la probabilité que dans un échantillon aléatoire de 60 élèves de douzième année au moins 20 élèves aient un emploi à mi-temps.

   (Montrez toutes les étapes de votre solution. Si vous utilisez une calculatrice, indiquez clairement la fonction utilisée et la substitution des valeurs numériques dans cette fonction.) **(4 points)**

solution

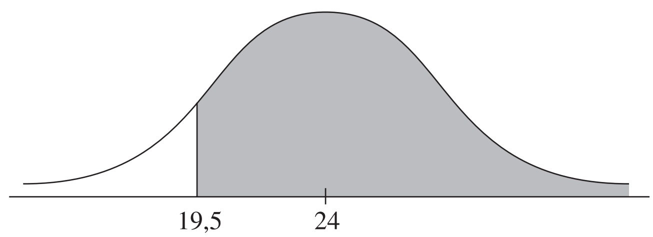
$\mu = 60(0,40) = 24$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$\sigma = \sqrt{(60)(0,4)(0,6)} = 3,795$ $\leftarrow$ **1 point**

pour $x = 20$, utilisez une correction pour continuité afin d'obtenir 19,5 $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

En utilisant la calculatrice TI-83:

$$\text{normal cdf}\left(19,5\ ;\ \overset{\frac{1}{2}\text{ point chacun}}{\overset{\downarrow}{1\text{E}99}}\ ;\ \overset{\downarrow}{24}\ ;\ \overset{\frac{1}{2}\text{ point}}{\overset{\downarrow}{\underbrace{\sqrt{(60)(0,4)(0,6)}}_{\text{ou } 3,795}}}\right)$$



$= 0,88$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**
ou
88 %

Notez: 1E99 pourrait être n'importe quel chiffre ≥ 60
en utilisant la calculatrice Sharp: cdfnorm $\left(19,5;\ 1\text{E}99;\ 24;\ \sqrt{(60)(0,4)(0,6)}\right)$

Notez: Si les élèves utilisent $1 - \text{binomcdf}\ (60;\ 0,40;\ 19)$, ils obtiendront aussi 88 % et ils devraient obtenir **1 point**. Les correcteurs accorderont 1 point car le but de la question est de voir si les élèves peuvent utiliser l'approximation normale du binôme.

7. Dans une ville, la probabilité qu'une élève de douzième année ait un emploi à mi-temps est de 0,40. Utilisez l'approximation normale du binôme pour déterminer la probabilité que dans un échantillon aléatoire de 60 élèves de douzième année au moins 20 élèves aient un emploi à mi-temps.

   (Montrez toutes les étapes de votre solution. Si vous utilisez une calculatrice, indiquez clairement la fonction utilisée et la substitution des valeurs numériques dans cette fonction.) **(4 points)**

autre solution

En utilisant une table de la distribution normale :

$$\mu = 60(0,4) = 24$$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

$$\sigma = \sqrt{60(0,4)(0,6)}$$ ← **1 point**

pour $x = 20$ utilisez une correction pour continuité afin d'obtenir $19,5$ ← **1 point**

$$z = \frac{19,5 - 24}{3,795} = -1,1858 \approx -1,19$$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

l'aire à la gauche de $z_{-1,19} = 0,1170$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

l'aire à la droite de $z_{-1,19} = 1 - 0,1170$

$$= 0,88$$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

ou

88 %

FIN DE CORRIGÉ