Principes de mathématiques 12

Examen provincial – Juin 2001

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes		Sous-composantes
1. La résolution de problèmes	A	Série de problèmes
2. Les relations et les représentations	B	Suites et séries
	C	Fonctions polynomiales
	D	Fonctions logarithmiques et exponentielles
	E	Relations quadratiques
	F	Systèmes quadratiques
3. Le plan et l'espace	G	Trigonométrie
	H	Géométrie

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	S	CO	RAP	Q	K	C	S	CO	RAP
1.	B	K	1,5	2	C1	23.	C	K	1,5	2	B1
2.	D	U	1,5	2	C3	24.	A	U	1,5	2	B4
3.	D	U	1,5	2	C5	25.	B	U	1,5	2	B4
4.	D	U	1,5	2	C9	26.	C	U	1,5	2	B4
5.	D	U	1,5	2; 1	C6; A7	27.	B	U	1,5	2	B6
6.	A	H	1,5	2	C4	28.	D	H	1,5	2	B4
7.	B	K	1,5	2	E1	29.	B	U	1,5	3	G1
8.	A	U	1,5	2	F5	30.	D	K	1,5	3	G2
9.	C	K	1,5	2	E5	31.	D	U	1,5	3	G7
10.	A	U	1,5	2	F1	32.	B	U	1,5	3	G3
11.	B	U	1,5	2	E6	33.	B	U	1,5	3	G5
12.	A	U	1,5	2	E4	34.	C	U	1,5	3; 1	G9; A7
13.	B	H	1,5	2	E2	35.	D	H	1,5	3	G2; G7
14.	A	H	1,5	2	F1	36.	C	U	1,5	3; 1	G5; A7
15.	C	K	1,5	2	D4	37.	C	U	1,5	3	G8
16.	D	K	1,5	2	D1	38.	C	U	1,5	3	H2
17.	A	K	1,5	2	D5	39.	B	U	1,5	3	H2
18.	C	U	1,5	2	D5; D4	40.	C	U	1,5	3	H3
19.	A	U	1,5	2	D6	41.	B	H	1,5	3	H3
20.	D	H	1,5	2	D5	42.	C	U	1,5	1	A3
21.	A	H	1,5	2	D5	43.	C	U	1,5	1	A3
22.	B	U	1,5	2	B5	44.	A	H	1,5	1	A1

Questions à choix multiple = 66 points

Partie B : Questions à développement

Q	**B**	**C**	**S**	**CO**	**RAP**
1.	1	U	4	2	C7
2.	2	U	4	2	F2
3.	3	U	4	3	G7
4a.	4	U	3	2	E4
4b.	5	U	2	2	E4
5.	6	U	4	2; 1	D5; A7
6.	7	U	4	1	A1; A7
7.	8	U	4	3	H3
8.	9	H	5	3	H4

Questions à développement = 34 points

Questions à choix multiple = 66 (44 questions)
Questions à développement = 34 (8 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 100 points

LÉGENDE :

Q = Numéro de la question	**K** = Réponse	**C** = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note	**S** = Note	**CO** = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrits		

1. Une fonction polynomiale du troisième degré possède un double zéro à -2 et son autre zéro est à 3. Si la fonction passe par le point $(4;\ -24)$, déterminez son équation. La réponse peut être laissée sous la forme d'un produit de facteurs. **(4 points)**

Solution

1 point pour *a*

↓

$y = a(x+2)^2(x-3)$ ← **1 point** pour les facteurs

$-24 = a(4+2)^2(4-3)$ ← **1 point** pour la substitution

$-24 = 36a$

$a = -\frac{2}{3}$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

$y = -\frac{2}{3}(x+2)^2(x-3)$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

2. Résolvez algébriquement le système suivant. Exprimez votre réponse sous la forme de couples.

(4 points)

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= 38 \\ x^2 + y^2 &= 21 \end{aligned}$$

Solution

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= 38 \\ x^2 + y^2 &= 21 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 3x^2 - 2y^2 &= 38 \\ \underline{2x^2 + 2y^2} &\underline{= 42} \end{aligned} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$5x^2 = 80$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{pour}\ \pm,\ \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{pour}\ 4$$

$$x^2 + y^2 = 21$$

$$16 + y^2 = 21 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$y^2 = 5$$

$$y = \pm\sqrt{5} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{pour}\ \pm,\ \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{pour}\ \sqrt{5}$$

$$\therefore\ \text{solutions sont}: \quad \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\left(4;\ \sqrt{5}\right)}\ ;\ \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\left(4;\ -\sqrt{5}\right)}\ ;\ \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\left(-4;\ \sqrt{5}\right)}\ ;\ \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\left(-4;\ -\sqrt{5}\right)}$$

3. Prouvez : **(4 points)**

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$$

Solution

Côté gauche	Côté droit
$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$	$\frac{1-\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$
1 point → $= \frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}\cdot\frac{(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)}$	
$\frac{1}{2}$ point → **$\frac{1}{2}$ point →** $= \frac{\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$	
$\frac{1}{2}$ point → $= \frac{\sin\theta\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin^2\theta}$	
$\frac{1}{2}$ point → $= \frac{\cos\theta(1-\cos\theta)}{\sin\theta}$	
$\frac{1}{2}$ point → $= \operatorname{cotg}\theta(1-\cos\theta)$	
$\frac{1}{2}$ point → $= \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$	

CG = CD

3. Prouvez : **(4 points)**

$$\frac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta} = \frac{1-\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$$

Autre solution

Côté gauche	Côté droit
$\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$	$\dfrac{1-\cos\theta}{\operatorname{tg}\theta}$
	$= \dfrac{(1-\cos\theta)}{\operatorname{tg}\theta}\ \dfrac{(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}$ **← 1 point**
	$= \dfrac{1-\cos^2\theta}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ (1+\cos\theta)}$ **← ½ point** **← ½ point**
	$= \left.\dfrac{\overset{\frac{1}{2}\text{ point}}{\downarrow}\ (\sin^2\theta)}{\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ (1+\cos\theta)\right)}\ \dfrac{\cos\theta}{\cos\theta}\ \right\\}$ **← ½ point**
	$= \dfrac{\sin^2\theta\cos\theta}{\sin\theta(1+\cos\theta)}$ **← ½ point**
	$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1+\cos\theta}$ **← ½ point**

CG = CD

Remarque : cette question est composée de deux parties, a) et b).
Une grille a été fournie comme brouillon.

4. $(-2;\ 2)$ et $(8;\ 2)$ sont des sommets d'une ellipse tangente à l'axe des x.

a) Déterminez l'équation de cette ellipse. **(3 points)**

Solution

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\frac{(x-3)^2}{25}} + \underset{\substack{\uparrow\\ \textbf{1 point}}}{\frac{(y-2)^2}{4}} = 1$$

1 point pour le centre $(3;\ 2)$

$\frac{1}{2}$ **point** pour la forme de l'équation

b) Si $(6;\ y)$ est un point d'une ellipse, déterminez toutes les valeurs possibles de y. **(2 points)**

Solution

$$\frac{(6-3)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

← $\frac{1}{2}$ **point** pour avoir substitué $(6;\ 4)$ dans l'équation

$$\frac{9}{25} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

$$\frac{(y-2)^2}{4} = \frac{16}{25}$$

← $\frac{1}{2}$ **point**

$$(y-2)^2 = \frac{64}{25}$$

$$y-2 = \pm\frac{8}{5} = \pm 1,60$$

$$\therefore\ y = \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{2+1,6 = 3,60} \qquad \text{ou} \qquad y = \underset{\substack{\uparrow\\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{2-1,6 = 0,40}$$

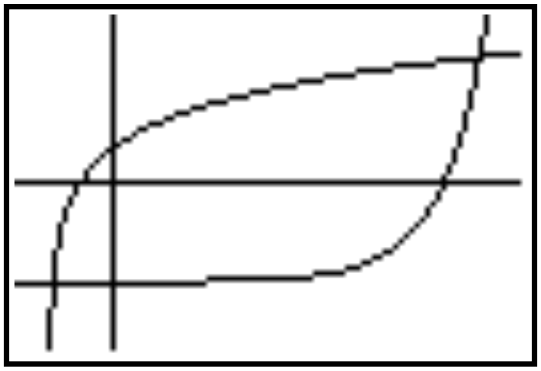
5. Résolvez le système suivant à l'aide d'une calculatrice graphique. **(4 points)**

$$y = 2^{x-9} - 3$$

$$y = \log_2(x+2)$$

Tracez le graphe dans la fenêtre d'affichage ci-dessous. Écrivez la ou les fonction(s) que vous avez inscrites dans la calculatrice pour obtenir votre graphe et votre solution. Indiquez les dimensions de la fenêtre d'affichage en montrant une portion suffisante du graphe afin que les éléments caractéristiques de la ou des fonction(s) ainsi que tous les points d'intersection soient visibles.

Solution



$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= 2^{x-9} - 3 \\ Y_2 &= \frac{\log(x+2)}{\log 2} \end{aligned}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{pour les équations}$$

← **1 point** pour le graphe

$x\ [-3;\ 13]$ $y\ [-5;\ 5]$ ← **½ point** pour les dimensions de la fenêtre

$(-1,87;\ -3,00)$ ← **1 point**

$(11,76;\ 3,78)$ ← **1 point**

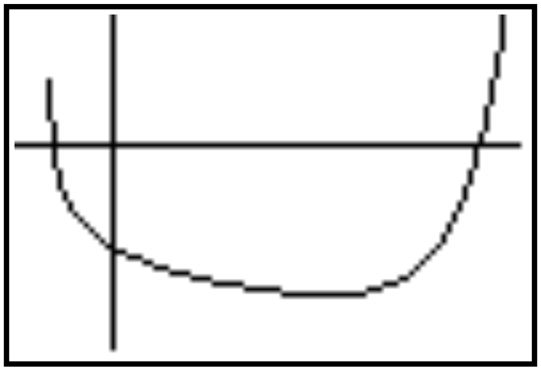
5. Résolvez le système suivant à l'aide d'une calculatrice graphique. **(4 points)**

$$y = 2^{x-9} - 3$$

$$y = \log_2(x + 2)$$

Tracez le graphe dans la fenêtre d'affichage ci-dessous. Écrivez la ou les fonction(s) que vous avez inscrites dans la calculatrice pour obtenir votre graphe et votre solution. Indiquez les dimensions de la fenêtre d'affichage en montrant une portion suffisante du graphe afin que les éléments caractéristiques de la ou des fonction(s) ainsi que tous les points d'intersection soient visibles.

Autre solution



$Y_1 = 2^{x-9} - 3 - \dfrac{\log(x + 2)}{\log 2}$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour l'équation

← **1 point** pour le graphe

$x\ [-3;\ 13]$ $y\ [-8;\ 5]$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions de la fenêtre

$(-1{,}87;\ -3{,}00)$ ← **1 point**

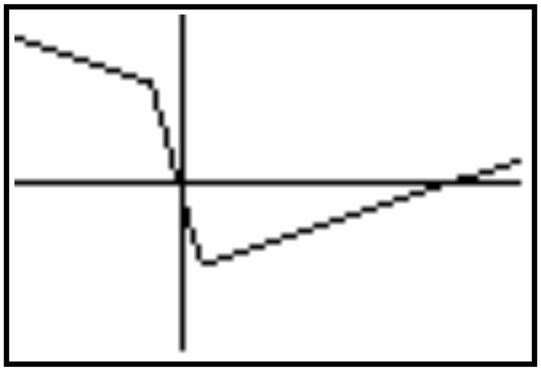
$(11{,}76;\ 3{,}78)$ ← **1 point**

6. Résolvez l'équation suivante à l'aide d'une calculatrice graphique. **(4 points)**

$$1,2|x-1| = |x+2|$$

Tracez le graphe dans la fenêtre d'affichage ci-dessous et indiquez les dimensions appropriées de la fenêtre. Nommez la ou les fonctions utilisées dans votre graphe. Assurez-vous que les points maximum et minimum relatifs de la ou des fonctions sont visibles à l'intérieur de la fenêtre d'affichage.

Solution



$Y_1 = 1,2|x-1| - |x+2|$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour l'équation

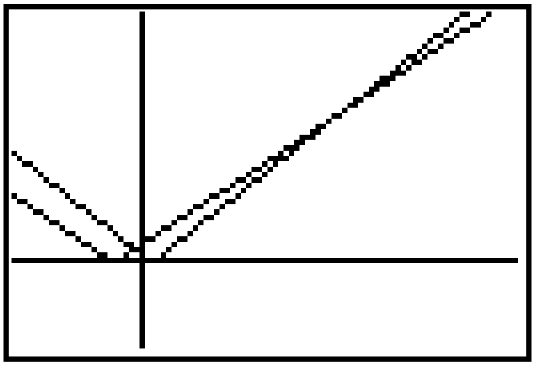
← **1 point** pour le graphe

$x\ [-10;\ 20]$ $y\ [-6;\ 6]$

← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions de la fenêtre

$$\underset{\textbf{1 point}}{\underset{\uparrow}{x = -0,36}}\ ;\ \underset{\textbf{1 point}}{\underset{\uparrow}{16}}$$

Autre solution



$Y_1 = 1,2|x-1|$

$Y_2 = |x+2|$

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\}$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les équations

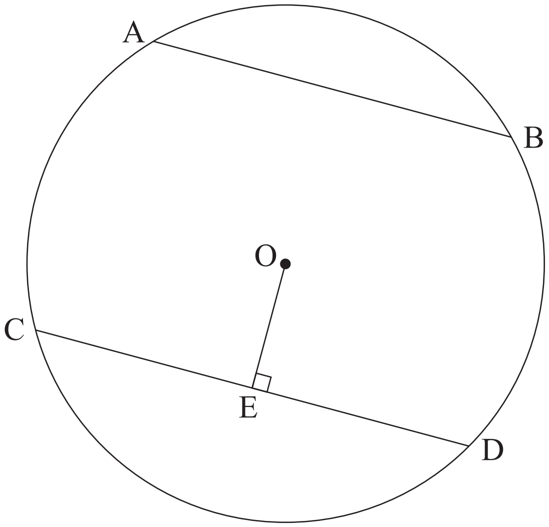
← **1 point** pour le graphe

$x\ [-10;\ 30]$ $y\ [-10;\ 30]$

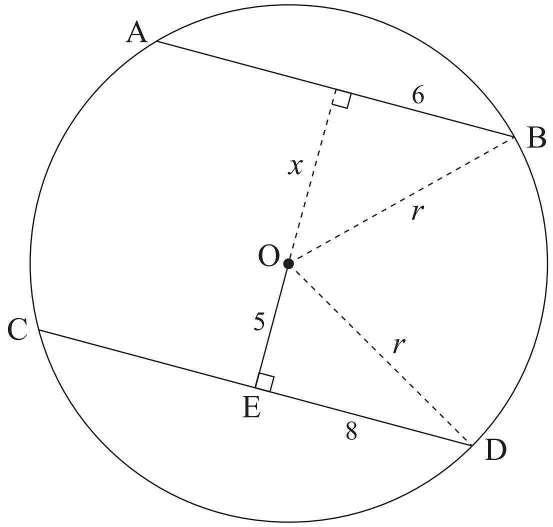
← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions de la fenêtre

$$\underset{\textbf{1 point}}{\underset{\uparrow}{x = -0,36}}\ ;\ \underset{\textbf{1 point}}{\underset{\uparrow}{16}}$$

7. Un cercle de centre O a deux cordes parallèles AB et CD. Si $AB = 12$ cm, $CD = 16$ cm, $OE = 5$ cm et $OE \perp CD$, déterminez la distance entre les cordes. **(4 points)**



Solution



$r^2 = 8^2 + 5^2 = 89$ ← **1 point**

$r = \sqrt{89}$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

$x^2 = r^2 - 6^2$ ← **1 point**

$x^2 = 89 - 36$

$x^2 = 53$

$x = \sqrt{53}$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

distance $= \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\text{ point}}}{5} + \sqrt{53} = 12{,}2801\ldots$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

$= 12{,}28$ cm

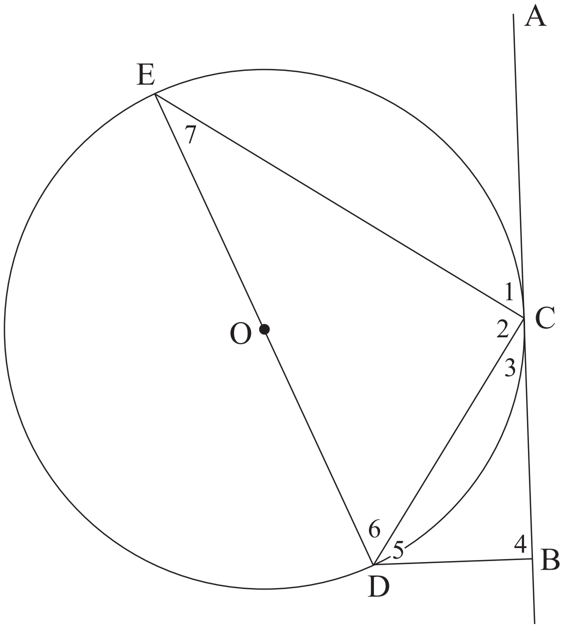
Les élèves doivent choisir l'une ou l'autre méthode de preuve.

8. Complétez la preuve. **(5 points)**

Légende : O est le centre du cercle

Données : AB est tangent au cercle en C
DC est la bissectrice de $\angle$EDB

Prouvez : DB $\perp$ AB



Solution

Présentation de la preuve sous forme de paragraphe:

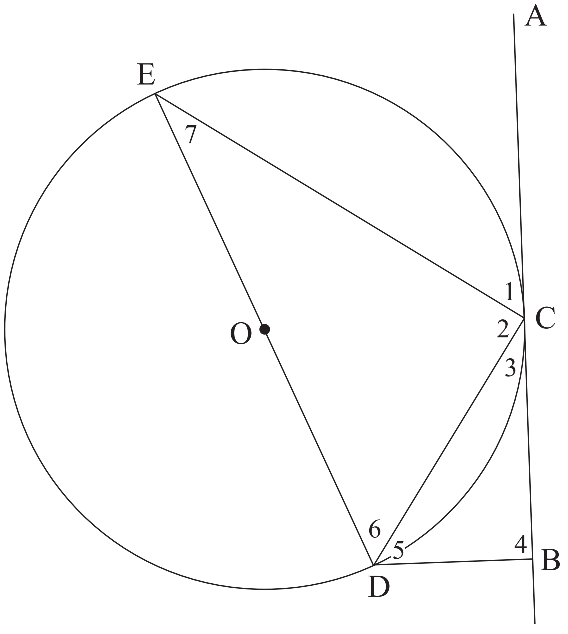
Puisque AB est une tangente, $\angle 3 = \angle 7$ (**$\frac{1}{2}$ point**) par $\angle$ entre tangente et corde **(1 point)** et puisque DC est la bissectrice de $\angle$EDB, $\angle 5 = \angle 6$ (**$\frac{1}{2}$ point**) par définition de la bissectrice. Donc $\angle 4 = \angle 2$ (**$\frac{1}{2}$ point**) car 3^{e} $\angle$ d'un Δ (**$\frac{1}{2}$ point**), mais $\angle 2 = 90°$ (**$\frac{1}{2}$ point**) car $\angle$ interceptant un diamètre (**$\frac{1}{2}$ point**), donc $\angle 4 = 90°$ (**$\frac{1}{2}$ point**). Donc DB $\perp$ AB par définition de la perpendiculaire (**$\frac{1}{2}$ point**).

8. Complétez la preuve. **(5 points)**

Légende : O est le centre du cercle

Données : AB est tangent au cercle en C
DC est la bissectrice de ∠EDB

Prouvez : DB ⊥ AB



Solution

Présentation de la preuve en deux colonnes :

	Énoncé	Raison	
	AB est tangent au cercle	donnée	
$\frac{1}{2}$ **point →**	∠3 = ∠7	∠ entre tangente et corde	**← 1 point**
	DC est la bissectrice de ∠EDB	donnée	
$\frac{1}{2}$ **point →**	∠5 = ∠6	définition de la bissectrice	
$\frac{1}{2}$ **point →**	∠4 = ∠2	3^e ∠s des Δs sont =	**←** $\frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point →**	∠2 = 90°	∠ inscrit sur un diamètre = 90	**←** $\frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point →**	∠4 = 90°	en substituant	
	DB ⊥ AB	définition de ⊥	**←** $\frac{1}{2}$ **point**

FIN DE CORRIGÉ