Principes de mathématiques 12

Examen provincial – Juin 1999

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes		**Domaines**
1. La résolution de problèmes	A	Série de problèmes
2. Les relations et leurs représentations	B	Suites et séries
	C	Fonctions polynomiales
	D	Fonctions logarithmiques et exponentielles
	E	Relations quadratiques
	F	Systèmes quadratiques
3. Le plan et l'espace	G	Trigonométrie
	H	Géométrie

Partie A : Questions à choix multiple

Q	**K**	**C**	**CO**	**RAP**	**Q**	**K**	**C**	**CO**	**RAP**
1.	A	U	2	C4	24.	C	U	2	D5
2.	A	U	2	C6	25.	A	K	2	D2
3.	C	U	2	C2, A7	26.	B	U	2	D5
4.	D	U	2	C5	27.	B	H	2	D5
5.	B	U	2	C7	28.	D	H	2	D2
6.	A	H	2	C1	29.	B	U	3	G1
7.	B	U	2	E2	30.	D	K	3	G5
8.	C	U	2	F5	31.	B	U	3	G6
9.	D	K	2	E6	32.	D	U	3	G2
10.	D	K	2	E5	33.	B	U	3	G3
11.	C	U	2	E6	34.	D	U	3	G9, A7
12.	A	U	2	F1	35.	C	U	3	G9
13.	D	H	2	F3	36.	D	U	3	G7
14.	D	H	2	E5	37.	A	H	3	G5
15.	A	K	2	B1	38.	D	H	2, 3	B4, G7
16.	B	U	2	B6	39.	C	U	3	H1
17.	A	U	2	B4	40.	D	U	3	H2
18.	C	U	2	B2	41.	C	U	3	H2
19.	D	U	2	B4	42.	A	H	3	H3
20.	D	U	2	B4	43.	C	H	1	A3, 7
21.	A	H	2	B4	44.	B	U	1	A3
22.	B	K	2	D4	45.	C	U	1	A3
23.	A	U	2	D5					

Questions à choix multiple = 45 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	CO	RAP
1.	1	U	3	2	F2
2.	2	U	3	2	E7
3.	3	U	3	3	G8
4.	4	U	3	2	C9
5.	5	U	3	2	D5
6.	6	U	3	3	H4
7.	7	U	3	1	A3
8.	8	H	4	3	H4

Questions à développement = 25 points

Questions à choix multiple = 45 (45 questions)
Questions à développement = 25 (8 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 70 points

LÉGENDE :

Q = Numéro de la question | **K** = Réponse | **C** = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note | **S** = Note | **CO** = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrit

PARTIE B : QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT

Valeur : 25 points | **Durée suggérée : 45 minutes**

DIRECTIVES : On a incorporé l'espace pour le travail au brouillon dans l'espace alloué pour répondre à chaque question. Vous n'aurez peut-être pas besoin de tout l'espace qu'on vous a laissé pour répondre à chaque question. Lorsqu'on vous le demande, écrivez la réponse finale à la question dans l'espace prévu à cet effet.

Si, dans une justification, vous faites référence à l'information fournie par la calculatrice, cette information doit être présentée clairement dans la réponse. Par exemple, si on utilise un graphe pour résoudre un problème, il est important de tracer le graphe, en montrant sa forme générale et en indiquant les dimensions appropriées de la fenêtre.

Lorsque vous vous servez de la calculatrice, vous devez fournir une réponse en décimales, qui est précise à au moins 2 décimales près (à moins qu'on vous indique autre chose). Vous ne devez arrondir votre réponse **seulement** à l'étape finale de la solution.

On n'accordera PAS le nombre maximal de points pour une réponse finale seule.

1. Exprimez toutes les solutions algébriques du système suivant sous la forme de couples. **(3 points)**

$$3x^2 + 4y^2 = 21$$
$$x^2 - 2y = 1$$

Solution

$$x^2 = 2y + 1$$

$$3(2y+1) + 4y^2 = 21 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$
$$6y + 3 + 4y^2 = 21$$
$$4y^2 + 6y - 18 = 0$$
$$2y^2 + 3y - 9 = 0 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$
$$(y+3)(2y-3) = 0$$
$$y = -3\ ,\ \frac{3}{2} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

	$y = \frac{3}{2}$	$y = -3$	
	$x^2 = 2y + 1$	$x^2 = 2y + 1$	
	$x^2 = 4$	$x^2 = -5$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$x = \pm 2$	$\varnothing$	$\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)\ ;\ \left(-2,\ \frac{3}{2}\right)$$

$\uparrow$

$\frac{1}{2}$ **point**

1. Exprimez toutes les solutions algébriques du système suivant sous la forme de couples. **(3 points)**

$$3x^2 + 4y^2 = 21$$
$$x^2 - 2y = 1$$

Autre solution 1

$$\begin{array}{lcl} 3x^2 + 4y^2 = 21 & & 3x^2 + 4y^2 = 21 \\ x^2 - 2y = 1 & \rightarrow & \underline{-3x^2 + 6y = -3} \quad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point} \\ & & 4y^2 + 6y = 18 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point} \end{array}$$

$$4y^2 + 6y - 18 = 0$$

$$2y^2 + 3y - 9 = 0$$

$$(2y-3)(y+3) = 0$$

$$y = \frac{3}{2} \quad y = -3 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

	$y = \frac{3}{2}$	$y = -3$	
	$x^2 = 2y + 1$	$x^2 = 2y + 1$	
	$x^2 = 4$	$x^2 = -5$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$x = \pm 2$	$\varnothing$	$\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)\ ;\ \left(-2,\ \frac{3}{2}\right)$$

$\uparrow$

$\frac{1}{2}$ **point**

1. Exprimez toutes les solutions algébriques du système suivant sous la forme de couples. **(3 points)**

$$3x^2 + 4y^2 = 21$$
$$x^2 - 2y = 1$$

Autre solution 2

$$3x^2 + 4y^2 = 21$$

$$x^2 - 2y = 1 \rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{2}$$

$$3x^2 + 4\left(\frac{x^2 - 1}{2}\right)^2 = 21 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$3x^2 + 4\left(\frac{x^4 - 2x^2 + 1}{4}\right) = 21$$

$$3x^2 + x^4 - 2x^2 + 1 = 21$$

$$x^4 + x^2 - 20 = 0 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

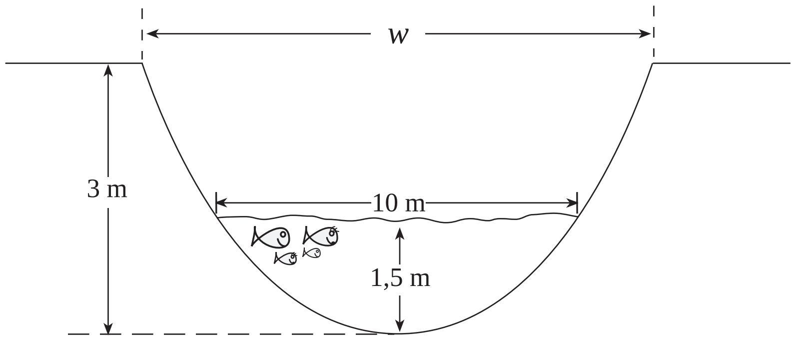
$$\left(x^2 + 5\right)\left(x^2 - 4\right) = 0$$

$$\underset{\tfrac{1}{2}\ \textbf{point}}{\underset{\uparrow}{\varnothing}} \qquad \underset{\tfrac{1}{2}\ \textbf{point}}{\underset{\uparrow}{x = \pm 2}}$$

$$y = \frac{(\pm 2)^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\left(2,\ \frac{3}{2}\right)\ ;\ \underset{\tfrac{1}{2}\ \textbf{point}}{\underset{\uparrow}{\left(-2,\ \frac{3}{2}\right)}}$$

2. La coupe transversale d'un canal de drainage est de forme parabolique comme illustré ci-dessous. Lorsque la largeur de la surface d'eau est de 10 mètres, la profondeur maximum de l'eau est 1,5 mètre. Déterminez la largeur du canal, *w*, lorsque la profondeur maximum est 3 mètres. **(3 points)**



Solution

$$y = ax^2 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$1,5 = a(5)^2 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$0,06 = a \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$y = 0,06x^2$$

$$3 = 0,06x^2 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$50 = x^2$$

$$5\sqrt{2} = x \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$\therefore$ la largeur du canal est $2\left(5\sqrt{2}\right) = 10\sqrt{2} \approx 14,14$ m $\leftarrow \tfrac{1}{2}$ **point**

3. Démontrez l'identité suivante : **(3 points)**

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Solution

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Côté gauche	Côté droit
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\cos\theta}$	$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\dfrac{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta}}{1+\cos\theta}$	$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{\cos\theta} \cdot \dfrac{1}{1+\cos\theta}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	

CG = CD

3. Démontrez l'identité suivante : **(3 points)**

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Autre solution 1

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Côté gauche	Côté droit
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1+\cos\theta}$	$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\left(\sin\theta + \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\cos\theta}{(1+\cos\theta)\cos\theta}$	$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}$ **point**
$= \dfrac{\sin\theta\cos\theta + \sin\theta}{(1+\cos\theta)\cos\theta}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta(\cos\theta+1)}{(1+\cos\theta)\cos\theta}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	

CG = CD

3. Démontrez l'identité suivante : **(3 points)**

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Autre solution 2

$$\frac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta} = \frac{\sin 2\theta}{2\cos^2\theta}$$

Côté gauche	Côté droit	
	$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$	$\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**
	$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	$\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**
	$= \dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1+\cos\theta)}{(1+\cos\theta)}$	$\leftarrow$ **1 point**
	$= \dfrac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta}{1+\cos\theta}$	$\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**
	$= \dfrac{\sin\theta + \operatorname{tg}\theta}{1+\cos\theta}$	$\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

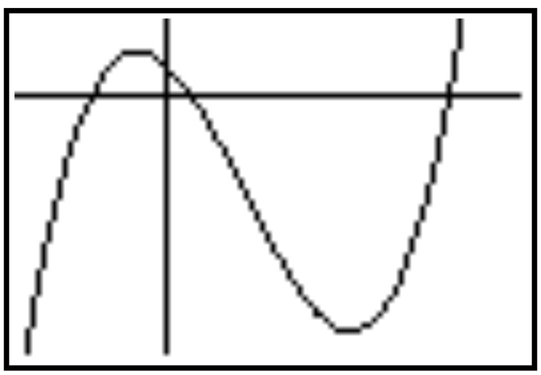
CG = CD

4. Résolvez l'inéquation suivante en utilisant une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$x^3 - 8x^2 > 18x - 20$$

Esquissez le graphe dans l'espace rectangulaire ci-dessous et indiquez les dimensions des côtés du rectangle. Indiquez les fonctions utilisées. Assurez-vous que les points maximaux et minimaux relatifs sont visibles à l'intérieur de l'espace rectangulaire. La solution peut être donnée sous forme algébrique ou sur une droite numérique.

Solution



$Y_1 = x^3 - 8x^2 - 18x + 20$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour l'équation

← $\frac{1}{2}$ **point** pour le graphe

$x\ [-5;\ 12]$ $y\ [-175;\ 50]$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions du graphique

La solution de cette inéquation peut être trouvée lorsque $Y_1 > 0$ ou lorsque le graphe de Y_1 est au-dessus de celui de l'axe *x*.

$\therefore\ -2,48 < x < 0,83$ ou $x > 9,65$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les zéros corrects

↑ ↑

$\frac{1}{2}$ **point** $\frac{1}{2}$ **point** ← **1 point pour l'analyse des régions sur l'axe**

OU

↓ ↓

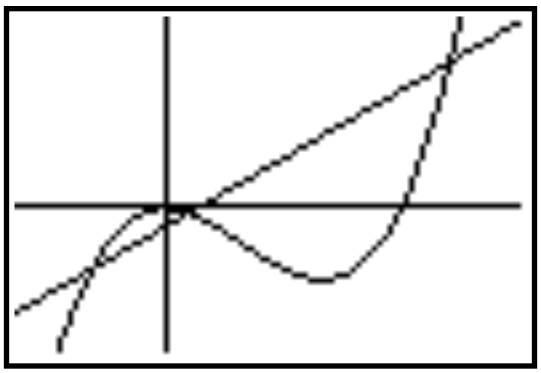
← **solution représentée sur l'axe**

4. Résolvez l'inéquation suivante en utilisant une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$x^3 - 8x^2 > 18x - 20$$

Esquissez le graphe dans l'espace rectangulaire ci-dessous et indiquez les dimensions des côtés du rectangle. Indiquez les fonctions utilisées. Assurez-vous que les points maximaux et minimaux relatifs sont visibles à l'intérieur de l'espace rectangulaire. La solution peut être donnée sous forme algébrique ou sur une droite numérique.

Autre solution



$Y_1 = x^3 - 8x^2$

$Y_2 = 18x - 20$

← **1 point** pour le graphe

$x\ [-5;\ 12]$ $y\ [-150;\ 200]$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions du graphique

La solution de cette inéquation peut être trouvée lorsque $Y_1 > Y_2$ ou lorque le graphe de Y_1 est au-dessus de celui de Y_2.

$\therefore\ -2,48 < x < 0,83$ ou $x > 9,65$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les zeros corrects

↑ ↑

$\frac{1}{2}$ **point** $\frac{1}{2}$ **point** ← **1 point pour l'analyse des régions sur l'axe**

OU

↓ ↓

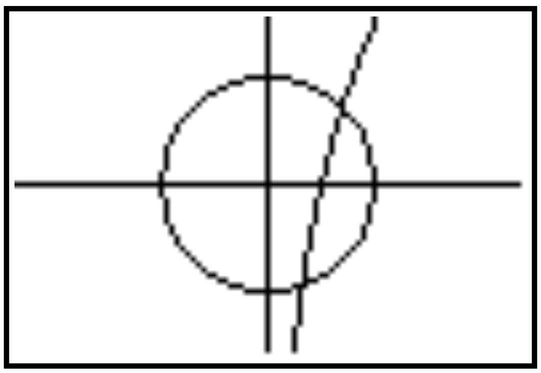
← **solution représentée sur l'axe**

5. Résolvez le système suivant à l'aide d'une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$y = 10\log x$$

Esquissez le graphe dans l'espace rectangulaire ci-dessous. Mentionnez la ou les fonction(s) utilisée(s) pour obtenir le graphe et la solution. Indiquez les dimensions du rectangle permettant de reconnaître les caractéristiques principales de la ou des fonctions et tel que tous les points d'intersection soient visibles.

Solution



$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \sqrt{(4-x)^2} \\ Y_2 &= -Y_1 \end{aligned}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \text{ pour les équations}$$

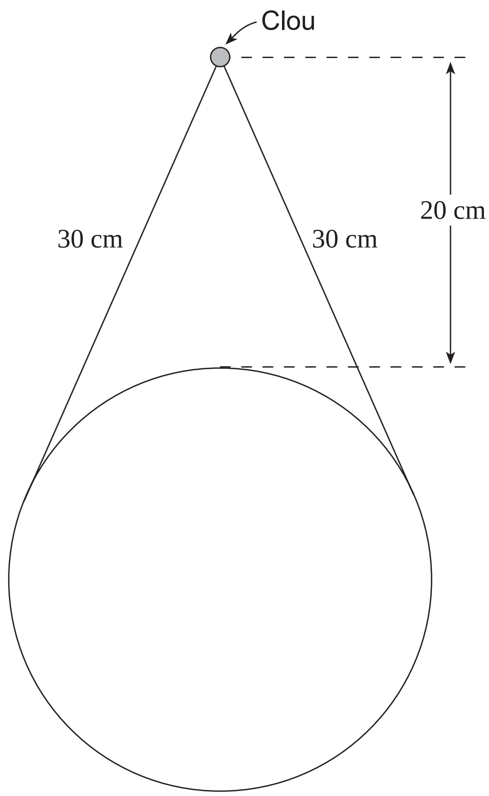
$$Y_3 = 10\log(x)$$

$\leftarrow$ **1 point** pour le graphe

$x\ [-4,7;\ 4,7]$ $\qquad$ $y\ [-3,1;\ 3,1]$

$\therefore$ les solutions sont : $(1,39;\ 1,44)$; $(0,65;\ -1,89)$ $\leftarrow$ **1 $\frac{1}{2}$ points** pour les solutions

6. Un miroir circulaire est suspendu à un clou par deux fils de longueur égale à 30 cm et tangents au miroir. Si le clou est situé à 20 cm du haut du miroir, quel est le diamètre du miroir? **(3 points)**



Solution

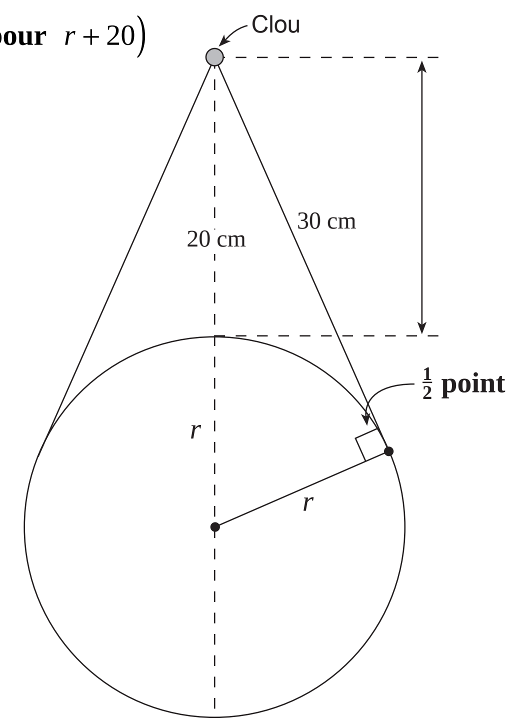
$r^2 + 30^2 = (r+20)^2$ ← **1 point** ($\frac{1}{2}$ **pour l'équation**, $\frac{1}{2}$ **pour** $r+20$)

$r^2 + 900 = r^2 + 40r + 400$ ← $\frac{1}{2}$ **point**

$500 = 40r$

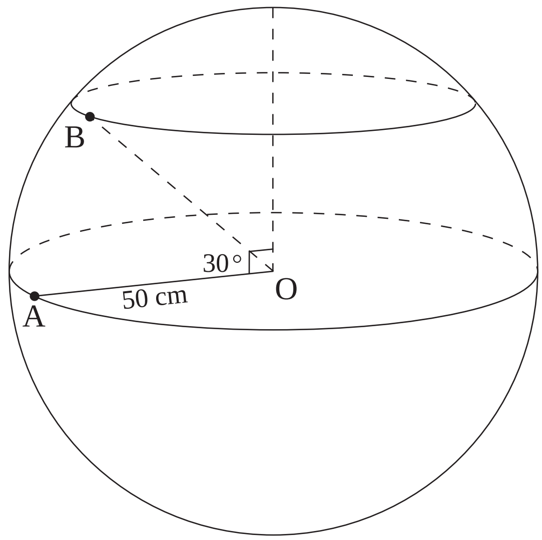
$r = \dfrac{25}{2}$ ← $\frac{1}{2}$ **point**

Diamètre = 25 cm ← $\frac{1}{2}$ **point**



7. Deux cercles sont tracés autour d'une sphère de centre O et de rayon 50 cm. Le cercle passant par le point A est à $0°$ latitude, et le plus petit cercle passant par le point B est à $30°$ latitude, comme illustré sur la figure suivante. Quelle est la circonférence du cercle passant par B?

(3 points)



Solution

$$\mathrm{OB} = 50 \text{ cm} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$\cos 30° = \frac{r}{50} \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

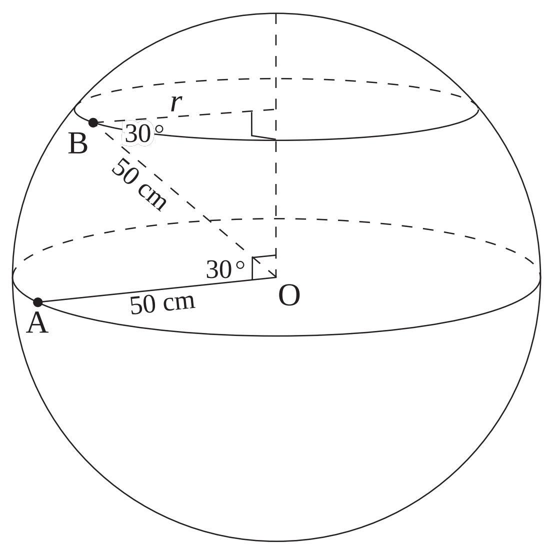
$$r = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 50$$

$$= 25\sqrt{3} \doteq 43{,}30 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

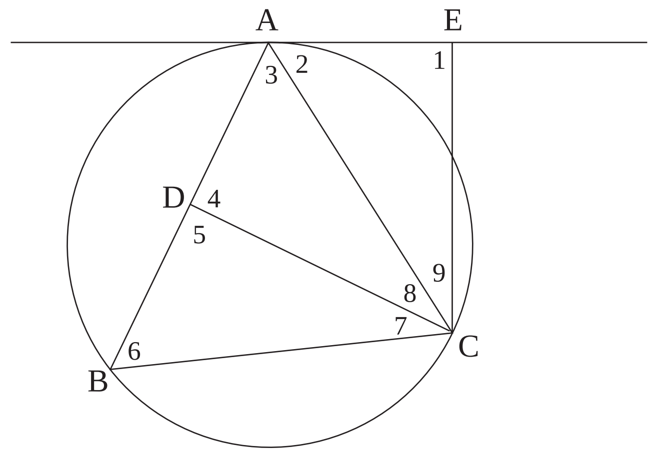
ainsi, $C = 2\pi r$

$$= 50\pi\sqrt{3}$$

$$\doteq 272{,}07 \text{ cm} \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$



8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**



Données : AE est tangent au cercle en A
$CE \perp AE$
$CD \perp AB$
$AC = BC$

Prouvez que : $CE = CD$

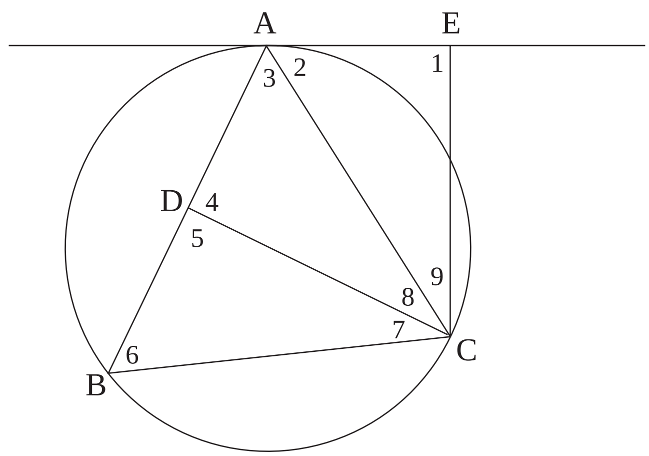
Solution

Méthode 1 :

DÉMONSTRATION

	Énoncé	Justification
	AE est tangente	donnée
1 point $\rightarrow$	$\angle 6 = \angle 2$	$\angle$ entre tangente et corde
	$CE \perp AE$, $CD \perp AB$	donnée
1 point $\rightarrow$	$\angle 1 = 90°$, $\angle 5 = 90°$	définition de $\perp$
$\frac{1}{2}$ point $\rightarrow$	$\angle 1 = \angle 5$	tous deux = 90°
	$AC = BC$	donnée
$\frac{1}{2}$ point $\rightarrow$	$\Delta AEC \cong \Delta BDC$	AAC $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**
$\frac{1}{2}$ point $\rightarrow$	$CE = CD$	ECPCC

8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**



Données : AE est tangent au cercle en A
$CE \perp AE$
$CD \perp AB$
$AC = BC$

Prouvez que : $CE = CD$

Solution

Méthode 2 :

Puisque AE est tangent, $\angle 2 = \angle 6$: $\angle$ entre tangente et corde

Puisque $AC = BC$, $\angle 6 = \angle 3$: angles opposés à des côtés = sont =

$\Rightarrow \angle 2 = \angle 3$

Puisque $CE \perp AE$ et $CD \perp AB$, $\angle 1 = \angle 4 = 90°$

$\Delta ADC \cong \Delta AEC$: AAC

$\therefore$ $CE = CD$

FIN DU CORRIGÉ