Principes de mathématiques 12

Examen provincial – Janvier 1999

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes	Domaines
1. La résolution de problèmes	A Série de problèmes
2. Les relations et leurs représentations	B Suites et séries C Fonctions polynomiales D Fonctions logarithmiques et exponentielles E Relations quadratiques F Systèmes quadratiques
3. Le plan et l'espace	G Trigonométrie H Géométrie

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	CO	RAP
1.	B	K	2	C4
2.	C	U	2	C5
3.	D	U	2	C4
4.	A	U	2, 1	C6, A7
5.	D	H	2	C1
6.	B	K	2	E5
7.	A	K	2	E2
8.	D	U	2	E5
9.	B	K	2	F1
10.	A	U	2	F4
11.	D	U	2	F3
12.	B	U	2	E4
13.	B	U	2	E6
14.	B	H	2	F1
15.	B	H	2, 1	F1, A7
16.	D	H	2	E7
17.	C	U	2	D5
18.	A	U	2	D5
19.	B	K	2	D1
20.	A	U	2	D2
21.	A	U	2	D5
22.	B	H	2	D5
23.	C	H	2	D5

Q	K	C	CO	RAP
24.	A	K	2	B1
25.	D	U	2	B4
26.	C	U	2	B2
27.	C	U	2	B4
28.	A	H	2	B4, 6
29.	C	K	3	G1
30.	D	U	3	G2
31.	C	U	3	G3
32.	A	U	3	G6, A7
33.	A	U	3	G5
34.	C	U	3	G5
35.	D	U	3	G8
36.	B	U	3	G9
37.	D	H	3	G2
38.	A	H	3	G3, 7
39.	B	U	3	H1
40.	B	U	3	H1
41.	C	U	3	H3
42.	C	H	3	H1
43.	D	U	1	A3
44.	C	U	1	A4
45.	D	H	1	A1

Questions à choix multiple = 45 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	CO	RAP
1.	1	U	3	2	C9, A7
2.	2	U	3	2	D6
3.	3	U	3	2	E4
4.	4	U	3	2	B7
5.	5	U	3	3	G8
6.	6	U	3	1	A3, 7
7.	7	U	3	3	H2
8.	8	H	4	3	H2

Questions à développement = 25 points

Questions à choix multiple = 45 (45 questions)
Questions à développement = 25 (8 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 70 points

LÉGENDE :
Q = Numéro de la question **K** = Réponse **C** = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note **S** = Note **CO** = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrit

PARTIE B : QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT

Valeur : 25 points **Durée suggérée : 45 minutes**

DIRECTIVES : On a incorporé l'espace pour le travail au brouillon dans l'espace alloué pour répondre à chaque question. Vous n'aurez peut-être pas besoin de tout l'espace qu'on vous a laissé pour répondre à chaque question. Lorsqu'on vous le demande, écrivez la réponse finale à la question dans l'espace prévu à cet effet.

Si, dans une justification, vous faites référence à l'information fournie par la calculatrice, cette information doit être présentée clairement dans la réponse. Par exemple, si on utilise un graphe pour résoudre un problème, il est important de tracer le graphe, en montrant sa forme générale et en indiquant les dimensions appropriées de la fenêtre.

Lorsque vous vous servez de la calculatrice, vous devez fournir une réponse en décimales, qui est précise à au moins 2 décimales près (à moins qu'on vous indique autre chose). Vous ne devez arrondir votre réponse **seulement** à l'étape finale de la solution.

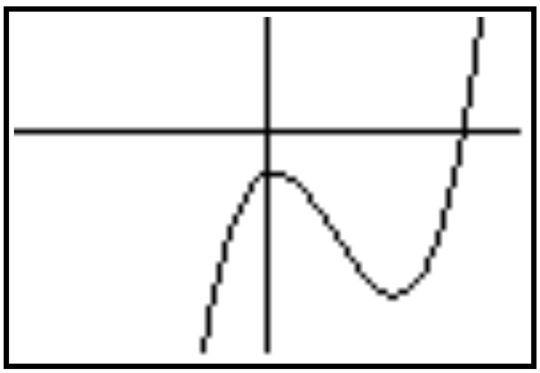
On n'accordera PAS le nombre maximal de points pour une réponse finale seule.

1. Résolvez l'inéquation suivante à l'aide d'une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$x^3 - 8x^2 \geq -4x + 20$$

Esquissez le graphe dans l'espace ci-dessous et indiquez les dimensions appropriées. Mentionnez la ou les fonction(s) utilisée(s). Assurez-vous que les maxima et minima relatifs sont visibles sur la figure. La solution doit être donnée sous forme algébrique ou représentée sur un axe.

Solution



$Y_1 = x^3 - 8x^2 + 4x - 20$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point** pour l'équation

$\leftarrow \frac{1}{2}$ **point** pour le graphe

$x\,[-10,\ 10]$ $\quad y\,[-100,\ 50]$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions du graphique

$x \geq 7{,}82$ $\}$ $\leftarrow$ $\frac{1}{2}$ **point** pour $7{,}82$
1 point pour $\geq$

OU

1 point
$\downarrow$

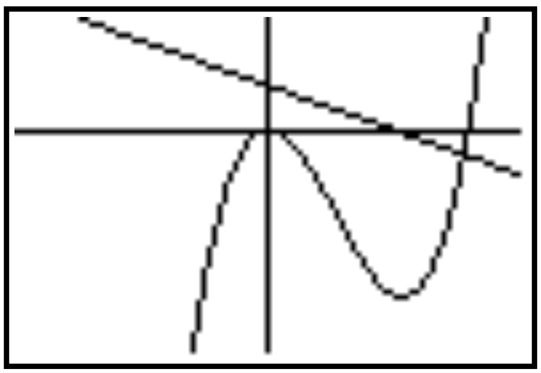
7,82
$\uparrow$
$\frac{1}{2}$ **point**

1. Résolvez l’inéquation suivante à l’aide d’une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$x^3 - 8x^2 \geq -4x + 20$$

Esquissez le graphe dans l’espace ci-dessous et indiquez les dimensions appropriées. Mentionnez la ou les fonction(s) utilisée(s). Assurez-vous que les maxima et minima relatifs sont visibles sur la figure. La solution doit être donnée sous forme algébrique ou représentée sur un axe.

Autre solution



$$\left.\begin{array}{l} Y_1 = x^3 - 8x^2 \\ Y_2 = -4x + 20 \end{array}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \text{ pour les équations}$$

$\leftarrow \tfrac{1}{2}$ **point** pour le graphe

$x\,[-10,\ 10]$ $y\,[-100,\ 50]$ $\leftarrow \tfrac{1}{2}$ **point** pour les dimensions du graphique

$$x \geq 7{,}82 \;\} \leftarrow \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \text{ pour } 7{,}82 \\ \textbf{1 point} \text{ pour } \geq \end{array}$$

OU

1 point

↓

7,82

↑

$\tfrac{1}{2}$ **point**

2. Une population de grenouilles double toutes les 20 semaines. Si la population de départ est de 400 grenouilles, en combien de temps la population sera-t-elle de 10 000 grenouilles? **(3 points)**

Solution

Méthode 1 :

$$n = \text{nombre de semaines nécessaires}$$

$$10\,000 = 400(2)^{\frac{n}{20}} \qquad \leftarrow \mathbf{1\tfrac{1}{2}\ point}$$

$$25 = 2^{\frac{n}{20}}$$

$$\left.\begin{aligned} \log(25) &= \log(2)^{\frac{n}{20}} \\ \log(25) &= \frac{n}{20}\log(2) \\ n &= \frac{20\log 25}{\log 2} \end{aligned}\right\} \leftarrow \mathbf{1\ point}$$

$$n = 92{,}88 \text{ semaines} \qquad \leftarrow \mathbf{\tfrac{1}{2}\ point}$$

Autre solution

Méthode 1 :

$$n = \text{nombre de semaines nécessaires}$$

$$10\,000 = 400(2)^{\frac{n}{20}} \qquad \leftarrow \mathbf{1\tfrac{1}{2}\ point}$$

$$25 = 2^{\frac{n}{20}}$$

$$\log_2 25 = \frac{n}{20} \qquad \leftarrow \mathbf{1\ point}$$

$$20\log_2 25 = n$$

$$92{,}88 \text{ semaines} = n \qquad \leftarrow \mathbf{\tfrac{1}{2}\ point}$$

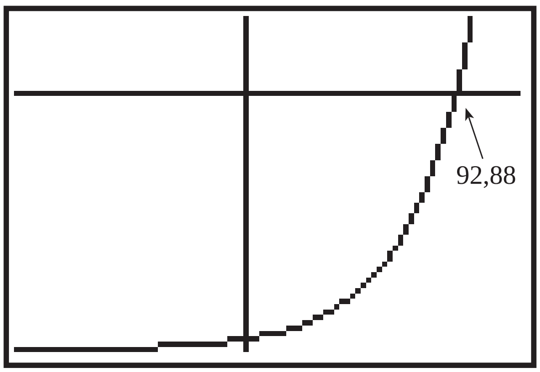
2. Une population de grenouilles double toutes les 20 semaines. Si la population de départ est de 400 grenouilles, en combien de temps la population sera-t-elle de 10 000 grenouilles? **(3 points)**

Solution

Méthode 2 :

L'équation $10\,000 = 400(2)^{\frac{n}{20}}$ **($1\frac{1}{2}$ point)** peut être résolue avec une calculatrice graphique.

Par exemple, $y = 400(2)^{\frac{x}{20}} - 10\,000$ et ensuite trouvez l'abscisse à l'origine.



$Y_1 = 400(2)^{\frac{x}{20}} - 10\,000$

$x = 92,88$ $\leftarrow$ **$1\frac{1}{2}$ point**

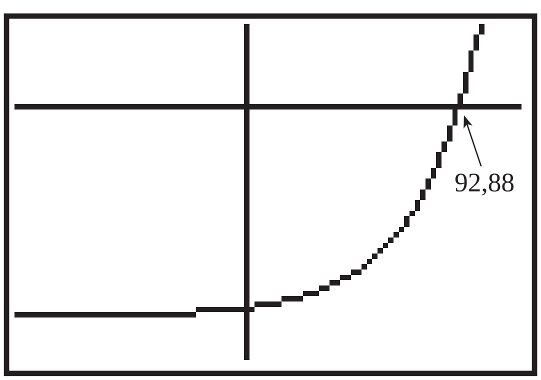
$x\ [-100,\ 120]$ $y\ [-10\,000,\ 2\,800]$

Autre solution

Méthode 2 :

L'équation $25 = (2)^{\frac{n}{20}}$ **($1\frac{1}{2}$ point)** peut être résolue avec une calculatrice graphique.

Par exemple, $y = (2)^{\frac{x}{20}} - 25$ et ensuite trouvez l'abscisse à l'origine.



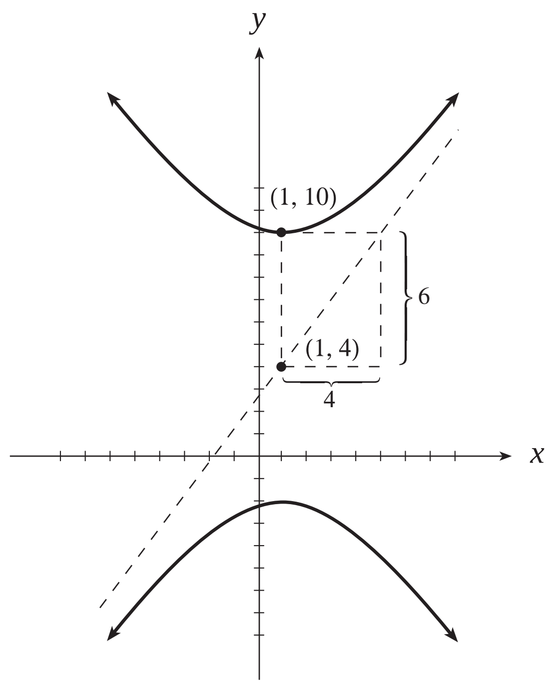
$Y_1 = (2)^{\frac{x}{20}} - 25$

$x = 92,88$ $\leftarrow$ **$1\frac{1}{2}$ point**

$x\ [-100,\ 120]$ $y\ [-30,\ 10]$

3. Le centre d’une hyperbole est situé au point de coordonnées $(1,\ 4)$ et le sommet au point $(1,\ 10)$. Si les pentes des asymptotes sont $\pm\frac{3}{2}$, déterminez l’équation de l’hyperbole sous forme standard. **(3 points)**

Solution



$\frac{1}{2}$ **point**

$\downarrow$

$$\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y-4)^2}{36}=-1 \quad \leftarrow \textbf{1 point} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{forme standard} \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{hyperbole correcte} \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

1 point $\frac{1}{2}$ **point**

OU

$\frac{1}{2}$ **point**

$\downarrow$

$$\frac{(y-4)^2}{36}-\frac{(x-1)^2}{16}=1 \quad \leftarrow \textbf{1 point} \quad \begin{cases} \frac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{forme standard} \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}\ \text{hyperbole correcte} \end{cases}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

$\frac{1}{2}$ **point** **1 point**

4. Le salaire mensuel de Pascale est de x $ au cours du premier mois et augmente de 50 $ par mois par la suite. Au cours d'une période de 24 mois, incluant le premier mois, Pascale a gagné 60 000 $. Déterminez la valeur de x. **(3 points)**

Solution

$$x + x + 50 + x + 2(50) + \ldots + x + 23(50) = 60\ 000$$

$$\left.\begin{aligned} S_n &= \frac{n}{2}\left(2a + (n-1)d\right) \\ a &= x \\ d &= 50 \\ n &= 24 \\ S_{24} &= 60\ 000 \end{aligned}\right\} \leftarrow \mathbf{1\tfrac{1}{2}\ point}$$

$$\begin{aligned} \frac{24}{2}\left(2x + (24-1)50\right) &= 60\ 000 \quad \leftarrow \mathbf{1\ point} \\ 12\left(2x + 1\ 150\right) &= 60\ 000 \\ 2x + 1\ 150 &= 5\ 000 \\ 2x &= 3\ 850 \\ x &= 1\ 925 \quad \leftarrow \mathbf{\tfrac{1}{2}\ point} \end{aligned}$$

4. Le salaire mensuel de Pascale est de x \$ au cours du premier mois et augmente de 50 \$ par mois par la suite. Au cours d'une période de 24 mois, incluant le premier mois, Pascale a gagné 60 000 \$. Déterminez la valeur de x. **(3 points)**

Autre solution

$$\begin{array}{ccccc} x, & x+50, & x+100, & \ldots & x+1\,150 \\ 1 & 2 & 3 & & 24 \end{array}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + t_n) \qquad \left.\begin{aligned} a &= x \\ n &= 24 \\ S_{24} &= 60\ 000 \\ t_n &= x + 1\,150 \end{aligned}\right\} \leftarrow \textbf{1}\,\tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \textbf{point}$$

$$60\ 000 = \frac{24}{2}(x + x + 1\,150) \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$5\ 000 = 2x + 1\,150$$

$$2x = 3\,850$$

$$x = 1\,925 \qquad \leftarrow \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\ \textbf{point}$$

5. Démontrez l'identité suivante :	**(3 points)**

$$\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = \frac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\operatorname{cotg}\theta}$$

Solution

$$\frac{\operatorname{cotg}\theta}{\operatorname{cosec}\theta - 1} = \frac{\operatorname{cosec}\theta + 1}{\operatorname{cotg}\theta}$$

Côté gauche	Côté droit
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta}{\left(\dfrac{1}{\sin\theta} - 1\right)\sin\theta}$	$= \dfrac{\left(\dfrac{1}{\sin\theta} + 1\right)\sin\theta}{\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\sin\theta}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $= \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$	$= \dfrac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}\,\dfrac{(1 - \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**
	$= \dfrac{1 - \sin^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$
	$= \dfrac{\cos^2\theta}{\cos\theta(1 - \sin\theta)}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**
	$= \dfrac{\cos\theta}{1 - \sin\theta}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

CG = CD

5. Démontrez l'identité suivante :	**(3 points)**
$$\frac{\text{cotg}\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = \frac{\text{cosec}\theta + 1}{\text{cotg}\theta}$$	

Autre solution 1

$$\frac{\text{cotg}\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = \frac{\text{cosec}\theta + 1}{\text{cotg}\theta}$$

	Côté gauche	Côté droit
1 point $\rightarrow$	$= \frac{(\text{cosec}\theta + 1)}{(\text{cosec}\theta + 1)} \frac{\text{cotg}\theta}{(\text{cosec}\theta - 1)}$	
$\frac{1}{2}$ point $\rightarrow$	$= \frac{\text{cotg}\theta(\text{cosec}\theta + 1)}{\text{cosec}^2\theta - 1}$	
1 point $\rightarrow$	$= \frac{\text{cotg}\theta(\text{cosec}\theta + 1)}{\text{cotg}^2\theta}$	
$\frac{1}{2}$ point $\rightarrow$	$= \frac{\text{cosec}\theta + 1}{\text{cotg}\theta}$	

CG = CD

5. Démontrez l'identité suivante :	**(3 points)**

$$\frac{\text{cotg}\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = \frac{\text{cosec}\theta + 1}{\text{cotg}\theta}$$

Autre solution 2

$$\frac{\text{cotg}\theta}{\text{cosec}\theta - 1} = \frac{\text{cosec}\theta + 1}{\text{cotg}\theta}$$

Côté gauche	Côté droit
½ point → $= \frac{(\text{cosec}\,\theta + 1)}{\text{cotg}\,\theta} \cdot \frac{\text{cotg}\,\theta}{\text{cotg}\,\theta}$	
1 point → $= \frac{(\text{cosec}\,\theta + 1) \cdot \text{cotg}\,\theta}{\text{cotg}^2\theta}$	
½ point → $= \frac{(\text{cosec}\,\theta + 1) \cdot \text{cotg}\,\theta}{\text{cosec}^2\theta - 1}$	
½ point → $= \frac{(\text{cosec}\,\theta + 1)\,\text{cotg}\,\theta}{(\text{cosec}\,\theta + 1)(\text{cosec}\,\theta - 1)}$	
½ point → $\frac{\text{cotg}\,\theta}{\text{cosec}\,\theta - 1}$	

CG = CD

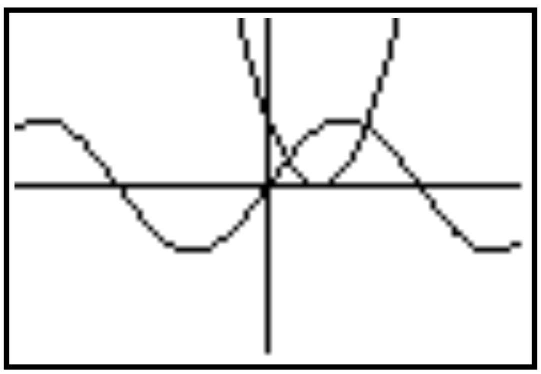
6. Résolvez le système suivant à l'aide d'une calculatrice graphique. Exprimez toutes les solutions sous la forme de couples (paires ordonnées). **(3 points)**

$$y = 4\sin\frac{\pi}{6}x$$

$$y = (x-2)^2$$

Esquissez le graphe dans l'espace ci-dessous. Identifiez les fonctions entrées dans la calculatrice pour obtenir le graphe et la solution. Indiquez les dimensions du graphique. L'espace ci-dessous doit être tel que les caractéristiques de chacune des fonctions soient visibles ainsi que le point d'intersection. (*Note* : Représentez graphiquement au moins une période de la fonction sinus.)

Solution



$x\ [-10,\ 10]$ $y\ [-10,\ 10]$

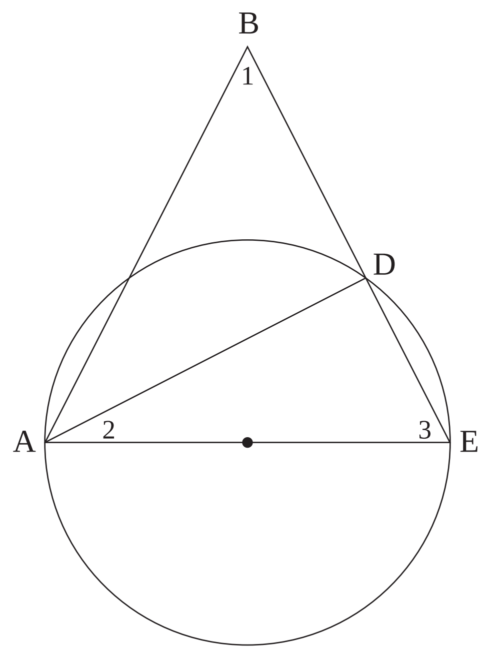
$\mathrm{Y}_1 = 4\sin\frac{\pi}{6}x$

$\mathrm{Y}_2 = (x-2)^2$

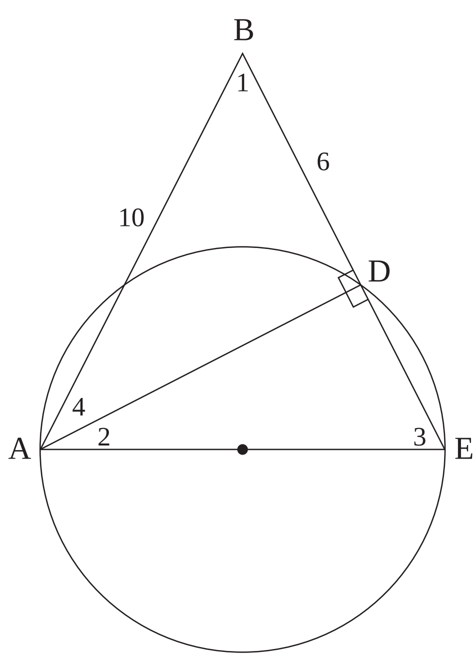
← $\frac{1}{2}$ **point** pour le graphe de chaque courbe
(1 point total)

$$\left.\begin{array}{l}(0{,}76\ ;\ 1{,}54)\\(3{,}89\ ;\ 3{,}57)\end{array}\right\} \leftarrow \textbf{2 points}$$

7. Dans la construction géométrique suivante, AE est un diamètre, $AB = 10$, $BD = 6$, $\angle 1 = \angle 2$ et B, D, E sont colinéaires. Trouvez la mesure de $\angle 3$. (Réponse au degré près.) **(3 points)**



Solution



$\angle ADE = 90°$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$\therefore$ $\angle BDA = 90°$

et puisque $\angle 1 = \angle 2$

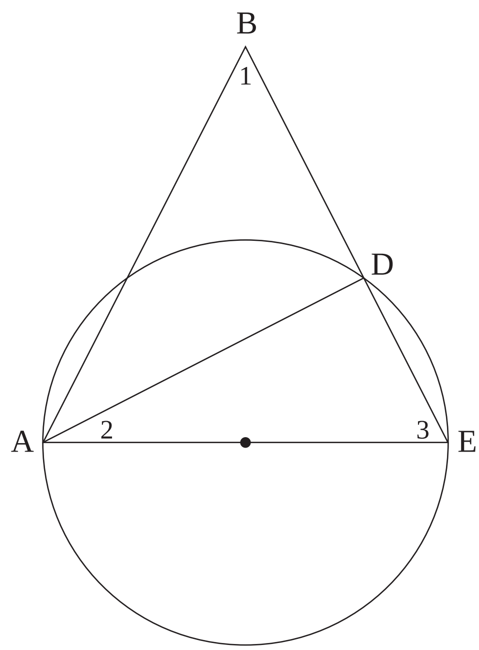
$\Rightarrow$ $\angle 4 = \angle 3$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$\sin \angle 4 = \dfrac{6}{10}$ $\leftarrow$ **1 point**

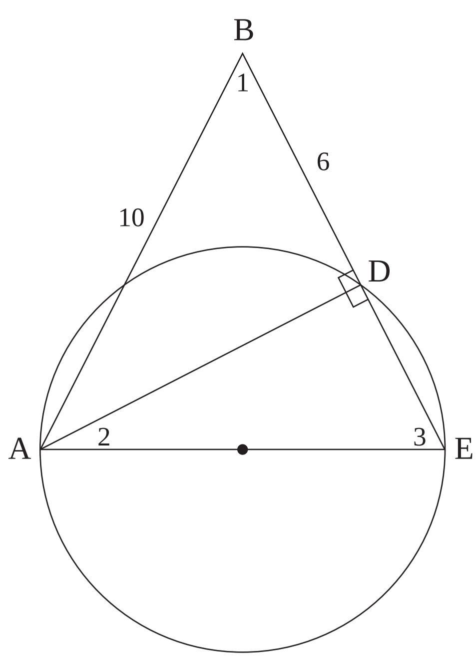
$\Rightarrow$ $\angle 4 = 37°$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

$\therefore$ $\angle 3 = 37°$ $\leftarrow$ **$\frac{1}{2}$ point**

7. Dans la construction géométrique suivante, AE est un diamètre, $AB = 10$, $BD = 6$, $\angle 1 = \angle 2$ et B, D, E sont colinéaires. Trouvez la mesure de $\angle 3$. (Réponse au degré près.) **(3 points)**



Autre solution



$\angle ADB = 90°$ ← **½ point**

$\cos\angle 1 = \dfrac{6}{10}$ ← **1 point**

$\angle 1 = 53°$ ← **½ point**

$\angle 3 = 37°$ ← **1 point**

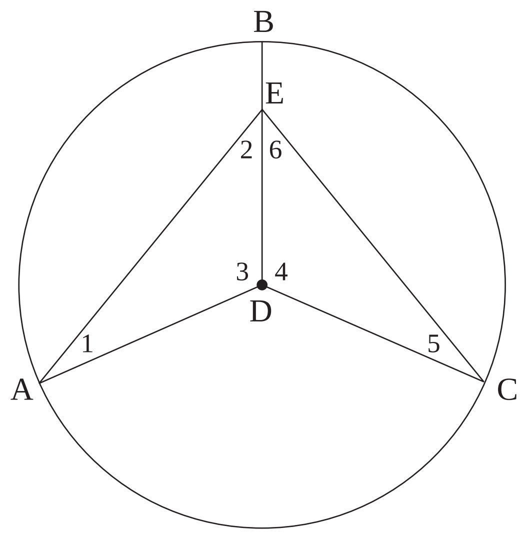
8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**

Données : D est le centre du cercle

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$

B, E, D sont colinéaires

Prouvez que : $\angle 1 = \angle 5$



Solution

Méthode 1 :

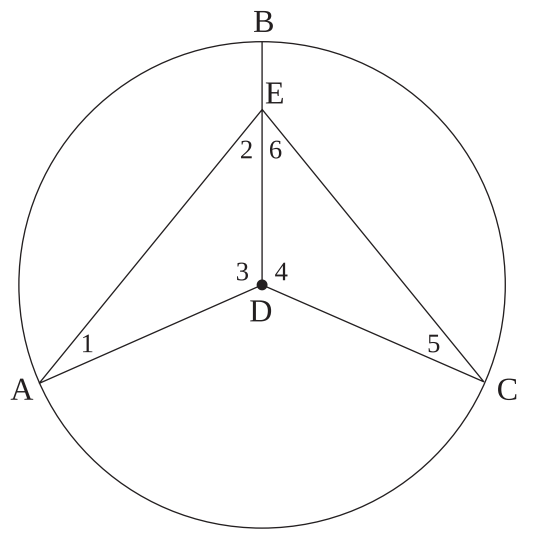
DÉMONSTRATION

	Énoncé		Justification
	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$		donnée
$\frac{1}{2}$ **point** →	$\angle 3 = \angle 4$	**1 point** →	$\angle$s au centre interceptant des arcs = sont =
	DA = DC	$\frac{1}{2}$ **point** →	rayons égaux
	DE = DE	$\frac{1}{2}$ **point** →	même côté
$\frac{1}{2}$ **point** →	$\Delta AED \cong \Delta CED$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CAC
	$\angle 1 = \angle 5$	$\frac{1}{2}$ **point** →	ECPCC

8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**

Données : D est le centre du cercle
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$
B, E, D sont colinéaires

Prouvez que : $\angle 1 = \angle 5$



Autre solution 1

Méthode 1 :

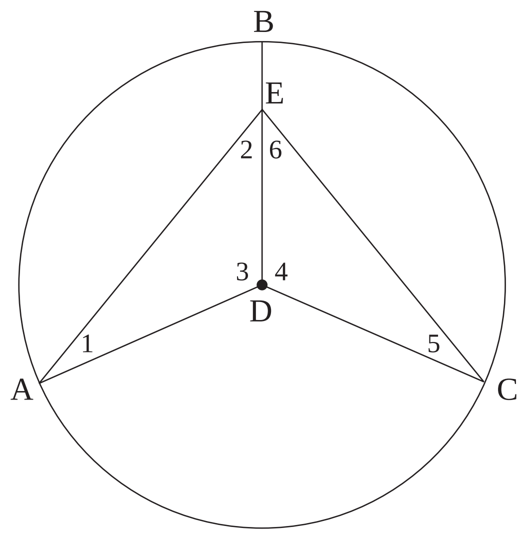
DÉMONSTRATION

	Énonce		Justification
	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$		donnée
	joins AB		
	joins CB		
	AB = CB	$\frac{1}{2}$ **point** →	cordes sur des arcs = sont =
	DB = DB	$\frac{1}{2}$ **point** →	même côté
	AD = CD		rayons égaux
	$\Delta ABD \cong \Delta CBD$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CCC
	$\angle 3 = \angle 4$	$\frac{1}{2}$ **point** →	ECPCC
	ED = ED	$\frac{1}{2}$ **point** →	même côté
$\frac{1}{2}$ **point** →	$\Delta ADE \cong \Delta CDE$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CCC
	$\angle 1 = \angle 5$	$\frac{1}{2}$ **point** →	ECPCC

8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**

Données : D est le centre du cercle
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$
B, E, D sont colinéaires

Prouvez que : $\angle 1 = \angle 5$



Autre solution 2

Méthode 1 :

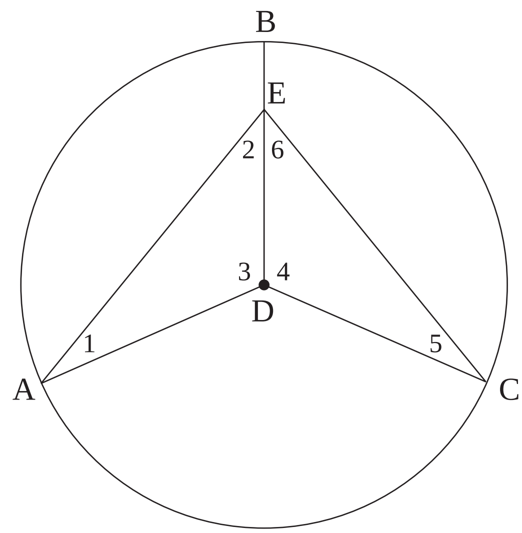
DÉMONSTRATION

	Énoncé		Justification
	$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$		donnée
	joins AB		
	joins CB		
	AB = CB	$\frac{1}{2}$ **point** →	cordes sur des arcs = sont =
	DB = DB	$\frac{1}{2}$ **point** →	même côté
	AD = CD		rayons égaux
	$\Delta ABD \cong \Delta CBD$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CCC
	$\angle ABD = \angle CBD$		ECPCC
	BE = BE		même côté
	$\Delta ABE \cong \Delta CBE$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CCC
	AE = CE		ECPCC
	DE = DE	$\frac{1}{2}$ **point** →	même côté
$\frac{1}{2}$ **point** →	$\Delta ADE \cong \Delta CDE$	$\frac{1}{2}$ **point** →	CCC
	$\angle 1 = \angle 5$	$\frac{1}{2}$ **point** →	ECPCC

8. Complétez la démonstration suivante. **(4 points)**

Données : D est le centre du cercle
$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC}$
B, E, D sont colinéaires

Prouvez que : $\angle 1 = \angle 5$



Solution

Méthode 2 :

une de ces réponses pour $\frac{1}{2}$ **point**

$$\text{Puisque } \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{BC},\ \underbrace{\angle 3 = \angle 4}_{\frac{1}{2}\ \textbf{point}}\ \underbrace{\text{puisque des } \angle\text{s au centre interceptant arcs = sont =}}_{\frac{1}{2}\ \textbf{point}}$$

$DA = DC$ puisque les rayons sont = $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$$\text{et } \underbrace{DE = DE}_{\frac{1}{2}\ \textbf{point}} \Rightarrow \underbrace{\Delta AED \cong \Delta CED}_{\frac{1}{2}\ \textbf{point}}\ \underbrace{\text{par CAC}}_{\frac{1}{2}\ \textbf{point}}$$

$\therefore\ \angle 1 = \angle 5$ par ECPCC $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

FIN DU CORRIGÉ