Mathématiques 12

Examen provincial – Juin 1998

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

Domaines :
1. Trigonométrie
2. Relations quadratiques
3. Fonctions exponentielles et logarithmiques
4. Fonctions polynomiales
5. Suites et séries
6. Introduction au calcul différentiel et intégral
7. Géométrie
8. Résolution de problèmes

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	T	ILO
1.	C	K	2	18
2.	D	U	2	14
3.	C	U	2	17
4.	C	U	2	18
5.	B	U	2	15
6.	D	U	2	12
7.	D	U	2	22
8.	B	U	2	16
9.	D	H	2	19
10.	B	H	2	20
11.	C	K	1	01
12.	C	U	1	05
13.	C	U	1	03
14.	B	U	1	02
15.	B	U	1	04
16.	D	U	1	08
17.	B	H	1	06
18.	D	H	1	08
19.	B	K	3	29
20.	A	U	3	31
21.	A	U	3	33
22.	D	U	3	25
23.	A	U	3	30
24.	B	H	3	32
25.	A	H	3	31

Q	K	C	T	ILO
26.	C	K	4	38
27.	A	U	4	40
28.	C	U	4	40
29.	D	U	4	41
30.	B	U	4	37
31.	A	U	4	39
32.	D	U	4	43
33.	D	H	4	35
34.	A	U	5	46
35.	A	U	5	46
36.	C	K	5	47
37.	B	U	5	46
38.	C	H	5	45
39.	A	K	6	57
40.	A	U	6	56
41.	A	U	6	50
42.	D	U	6	60
43.	B	U	6	53
44.	C	U	6	52
45.	C	H	6	53
46.	D	U	7	63
47.	B	U	7	63
48.	C	U	8	64
49.	D	U	8	64
50.	B	U	8	64

Choix multiple = 50 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	T	ILO
1.	1	U	3	3	32
2.	2	U	2	1	08
3.	3	U	3	5	48
4.	4	U	3	6	58
5.	5	U	3	2	21
6.	6	H	4	7	63
7.	7	U	2	8	64

Questions à développement = 20 points

Questions à choix multiple = 50 (50 questions)
Questions à développement = 20 (7 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 70 points

LÉGENDE :
Q = Numéro de la question
K = Réponse
C = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note
S = Note
T = Domaine
ILO = Résultats d'apprentissage visés

PARTIE B : QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT

Valeur : 20 points **Durée suggérée : 45 minutes**

DIRECTIVES : On a incorporé l'espace pour le travail au brouillon dans l'espace alloué pour répondre à chaque question. Vous n'aurez peut-être pas besoin de tout l'espace qu'on vous a laissé pour répondre à chaque question. Lorsqu'on vous le demande, écrivez la réponse finale à la question dans l'espace prévu à cet effet.

On n'accordera PAS le nombre maximal de points pour une réponse finale seule.

1. Résolvez pour x : $\log(3x-5)+\log(2x-1)=1$ **(3 points)**

SOLUTION :

$$\log(3x-5)+\log(2x-1)=1$$

$$\log(3x-5)(2x-1)=1 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$(3x-5)(2x-1)=10 \quad \leftarrow 1 \textbf{ point}$$

$$6x^2-13x+5=10$$

$$6x^2-13x-5=0 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$(3x+1)(2x-5)=0$$

$$\cancel{x=-\frac{1}{3}} \qquad x=\frac{5}{2}$$

à rejeter

$\uparrow$ $\quad$ $\uparrow$

$\frac{1}{2}$ **point** $\quad$ $\frac{1}{2}$ **point**

2. Prouvez l'identité : **(2 points)**

$$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta} = \cos\theta$$

SOLUTION :

Membre gauche	Membre droit
$\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta}$	$\cos\theta$
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $\dfrac{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{1}{\sin\theta}\right)}{\sin\theta\cos\theta\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $\dfrac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$ $\cos\theta$	

MG = MD

2. Prouvez l'identité : **(2 points)**

$$\frac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{cotg}\theta}=\cos\theta$$

AUTRE SOLUTION :

Membre gauche		Membre droit
	$\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\operatorname{tg}\theta+\operatorname{cotg}\theta}$	$\cos\theta$
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$\dfrac{\frac{1}{\sin\theta}}{\frac{1}{\sin\theta\cos\theta}}$	
	$\dfrac{1}{\sin\theta}\cdot\dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1}$	
$\frac{1}{2}$ **point** $\rightarrow$	$\cos\theta$	

MG = MD

3. Les 780 élèves d'une école secondaire forment une pyramide humaine en s'asseyant en rangées sur des gradins. La rangée du haut est occupée par un seul élève. Un élève de plus s'assied à chaque rangée suivante. Combien faut-il de rangées pour pouvoir asseoir les 780 élèves?
(3 points)

SOLUTION :

$$a = 1$$

$$d = 1 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$S_n = 780$$

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right]$$

$$780 = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1)1\right] \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$780 = \frac{n}{2}(1+n)$$

$$1\,560 = n + n^2$$

$$n + n^2 - 1\,560 = 0 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$(n+40)(n-39) = 0$$

$n = -40$ $\qquad$ $n = 39$

à rejeter

↑

$\frac{1}{2}$ **point**

$\therefore$ on a besoin de 39 rangées $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

AUTRE SOLUTION :

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = 780$$

$$a = 1$$

$$\ell = n \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + \ell) = 780$$

$$\frac{n}{2}(1+n) = 780 \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

$$n + n^2 = 1\,560$$

$$n + n^2 - 1\,560 = 0 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$(n+40)(n-39) = 0$$

$n = -40$ $\qquad$ $n = 39$

à rejeter

↑

$\frac{1}{2}$ **point**

$\therefore$ on a besoin de 39 rangées $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

4. Déterminez toutes les valeurs de x de sorte que la fonction $f(x) = x^4 - 18x^2 + 8$ soit **décroissante**. **(3 points)**

SOLUTION :

$$f(x) = x^4 - 18x^2 + 8$$

$$f'(x) = 4x^3 - 36x \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$4x^3 - 36x = 0 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2} \textbf{ point}$$

$$4x(x+3)(x-3) = 0$$

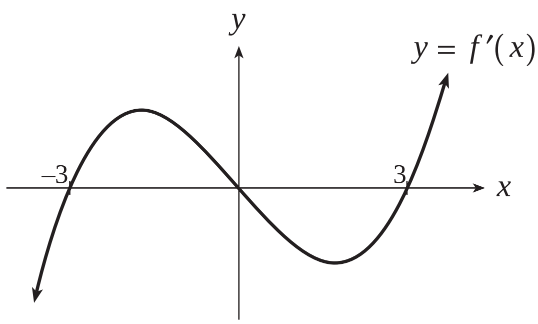
points critiques :

$$x = 0 \ , \ x = -3 \ , \ x = 3 \qquad \leftarrow \textbf{1 point}$$

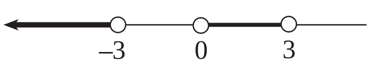
$$f'(x) = 4x(x+3)(x-3) < 0$$

OU **Autre solution graphique :**

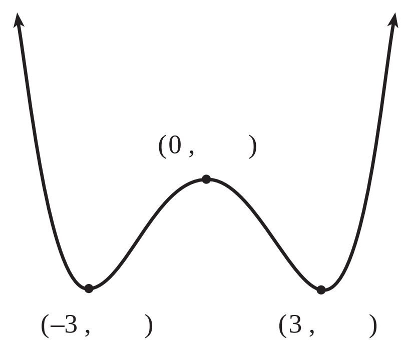
Graphe de $f'(x)$



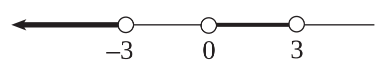
$x < -3$ **ou** $0 < x < 3$ ← **1 point**



$f(x) = x^4 - 18x^2 + 8$



$x < -3$ **ou** $0 < x < 3$ ← **1 point**



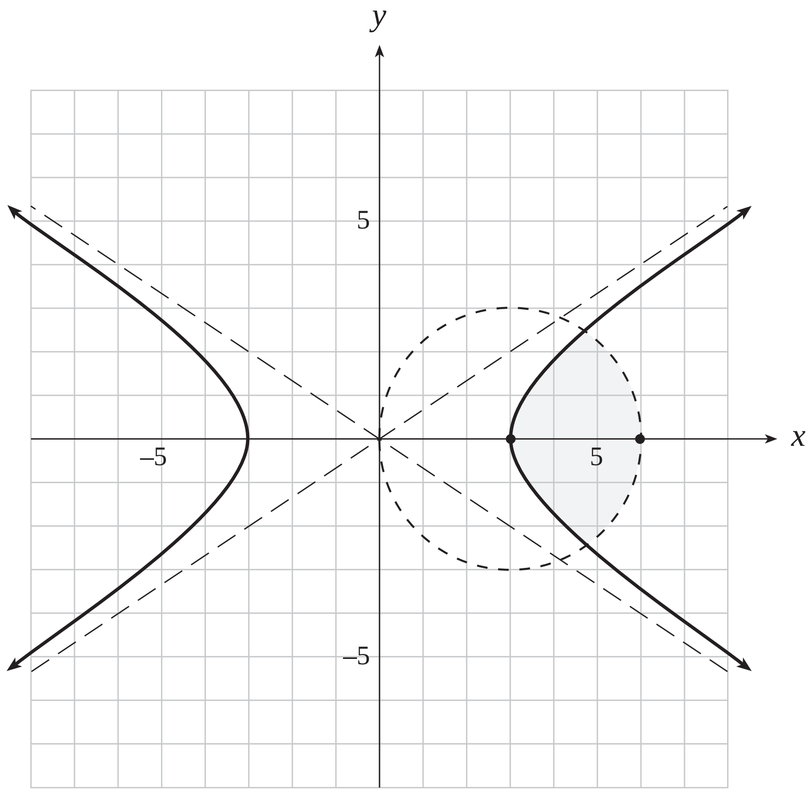
5. Représentez graphiquement la solution du système d'inéquations sur le graphique suivant.

(3 points)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} \geq 1$$

$$(x-3)^2 + y^2 < 9$$

SOLUTION :



1 point pour le graphe de l'hyperbole

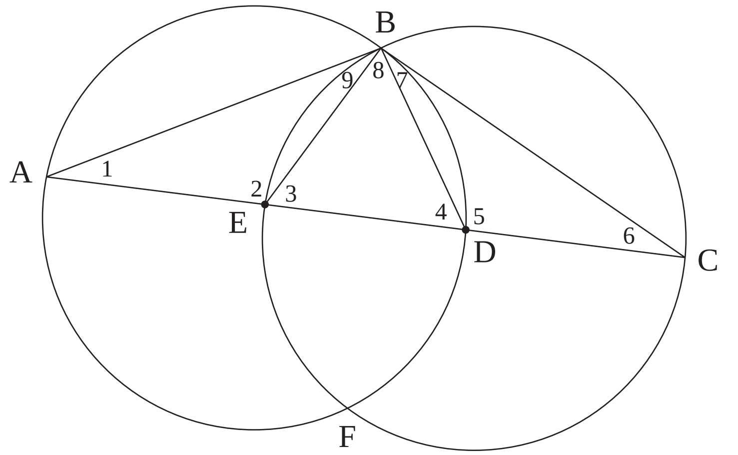
1 point pour le graphe du cercle

1 point pour avoir hachuré la bonne région de l'ensemble solution

6. Complétez la démonstration. **(4 points)**

Données : 2 cercles de centres E et D
BE = BD
A, E, D, C sont colinéaires

Démontrez : ΔABC est isocèle



SOLUTION :

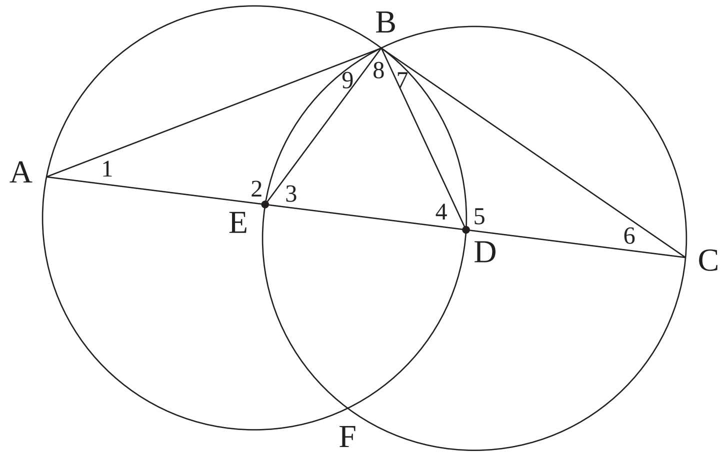
DÉMONSTRATION

Énoncé	Raison
BE = BD	donnée
$\angle 3 = \angle 4$	angles opposés à des côtés congruents sont =
$\angle 2 = \angle 5$	angles supplémentaires à des angles = sont =
AE = ED	= rayons
CD = ED	= rayons
AE = CD	tous deux = ED, en substituant
$\Delta AEB \cong \Delta CDB$	CAC
AB = CB or $\angle 1 = \angle 6$	ECPCC
ΔABC est isocèle	définition d’un triangle isocèle

6. Complétez la démonstration. **(4 points)**

Données : 2 cercles de centres E et D
BE = BD
A, E, D, C sont colinéaires

Démontrez : ΔABC est isocèle



AUTRE SOLUTION #1 :

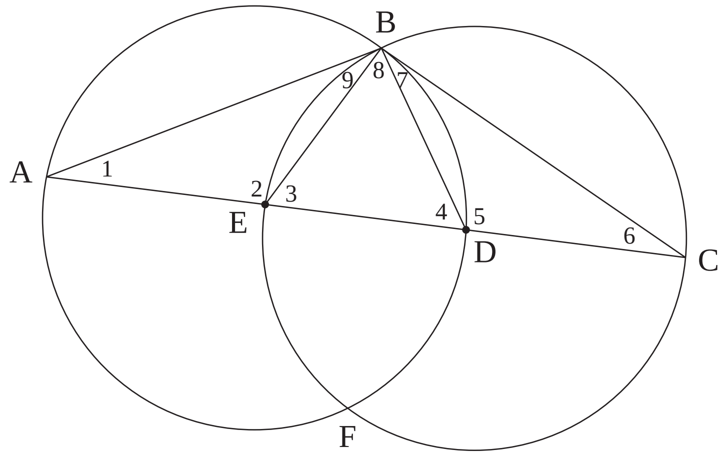
DÉMONSTRATION

Énoncé	Raison
BE = BD	donnée
$\angle ABD = 90°$, $\angle CBE = 90°$	angle inscrit à un diamètre
AE = ED	= rayons
ED = DC	= rayons
AE + ED = ED + DC	propriété de l'addition
AD = EC	en substituant
$\Delta ABD \cong \Delta CBE$	LH
AB = CB	ECPCC
ΔABC est isocèle	définition d'un triangle isocèle

6. Complétez la démonstration. **(4 points)**

Données : 2 cercles de centres E et D
BE = BD
A, E, D, C sont colinéaires

Démontrez : ΔABC est isocèle



AUTRE SOLUTION #2 :

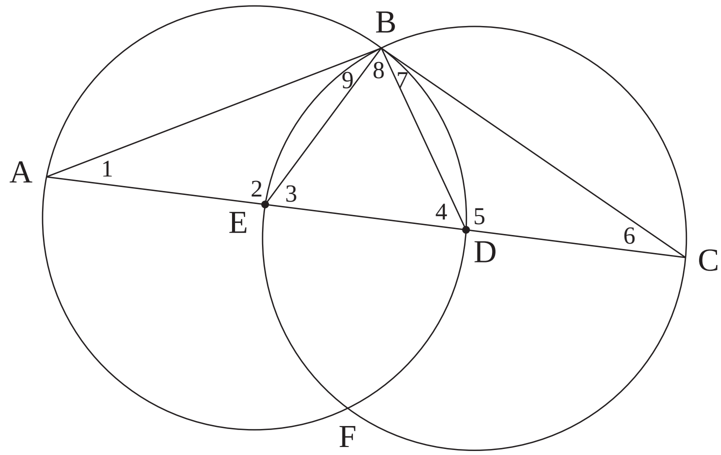
DÉMONSTRATION

Énoncé	Raison
$\angle$ABD = 90°, $\angle$CBE = 90°	angle inscrit à un diamètre
AB est tangente au cercle D en B	tangente $\perp$ rayon
CB est tangente au cercle E en B	tangente $\perp$ rayon
$\angle 1 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 9$	angle entre tangente et corde
$\angle$ABD = $\angle$CBE	tous deux = 90°, en substituant
$\angle$ABD − $\angle 8$ = $\angle$CBE − $\angle 8$	propriété de la soustraction
$\angle 9 = \angle 7$	en substituant
$\angle 1 = \angle 6$	deux angles = à un même troisième (en substituant)
ΔABC est isocèle	définition d'un triangle isocèle

6. Complétez la démonstration. **(4 points)**

Données : 2 cercles de centres E et D
BE = BD
A, E, D, C sont colinéaires

Démontrez : ΔABC est isocèle



AUTRE SOLUTION #3 :

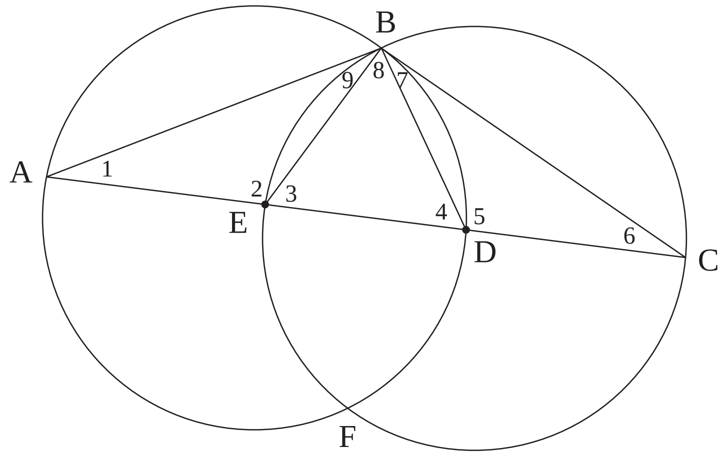
DÉMONSTRATION

Énoncé	Raison
$\angle ABD = 90°$, $\angle CBE = 90°$	angle inscrit à un diamètre
$\angle ABD = \angle CBE$	tous deux = 90°, en substituant
BE = BD	donnée
$\angle 3 = \angle 4$	angles opposés à des côtés congruents sont =
$\angle 1 = \angle 6$	troisièmes angles d'un triangle
ΔABC est isocèle	définition d'un triangle isocèle

6. Complétez la démonstration. **(4 points)**

Données : 2 cercles de centres E et D
BE = BD
A, E, D, C sont colinéaires

Démontrez : ΔABC est isocèle



AUTRE SOLUTION #4 :

DÉMONSTRATION

Énoncé	Raison
BE = BD	donnée
$\angle 3 = \angle 4$	angles opposés à des côtés congruents sont =
AE = ED	= rayons
ED = DC	= rayons
AE + ED = ED + DC	propriété de l'addition
AD = EC	en substituant
ΔABD $\cong$ ΔCBE	CAC
AB = BC	ECPCC
ΔABC est isocèle	définition d'un triangle isocèle

7. Données : Cercle de centre O

PQ, PR, QR sont tangents au cercle respectivement en A, B, C

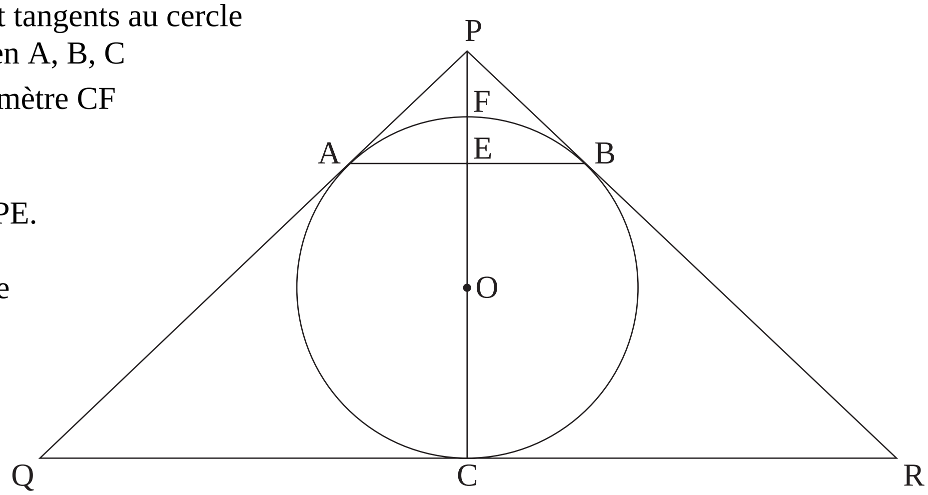
Corde AB $\perp$ diamètre CF

$CF = 8,\ EF = 1$

(2 marks)

Déterminez la longueur de PE.

(La figure n'est pas dessinée à l'échelle.)



SOLUTION :

$OB = 4$

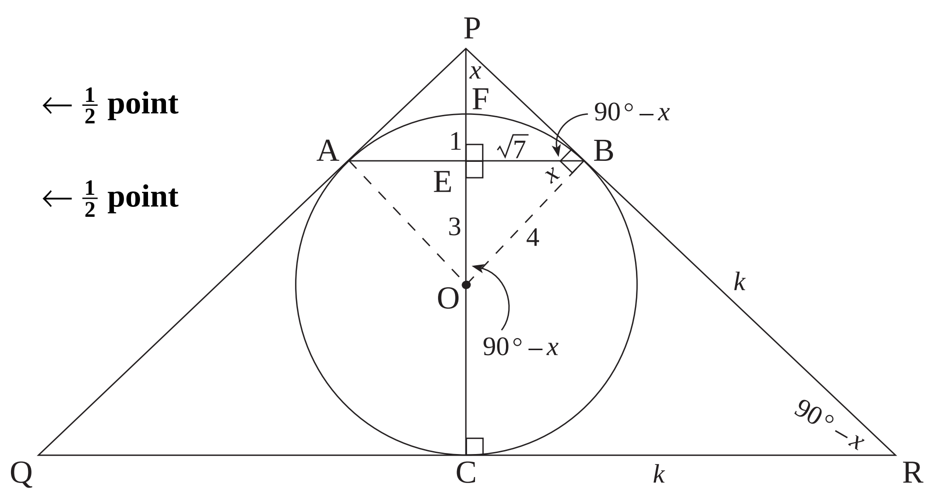
$EO = 3$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$\Rightarrow EB = \sqrt{7}$ (Pythagore) $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$\Delta PEB \sim \Delta BEO$

$\dfrac{PE}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**

$PE = \dfrac{7}{3}$ $\leftarrow \frac{1}{2}$ **point**



FIN DU CORRIGÉ