Principes de Mathématiques 12

Examen provincial – Juin 2002

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes		Domaines
1. La résolution de problèmes	A	Série de problèmes
2. Les relations et leurs représentations	B	Suites et séries géométriques
	C/D	Logarithmes et exposants
	C/D	Trigonométrie
3. Le plan et l'espace	E	Coniques
	F	Transformations
4. Statistiques et probabilités	G	Analyse combinatoire
	G	Probabilités
	G	Statistiques

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	S	CO	RAP	Q	K	C	S	CO	RAP
1.	D	U	1,5	2	C3	23.	B	K	1,5	3	E2
2.	A	U	1,5	2	C7	24.	B	K	1,5	3	E2
3.	D	U	1,5	2	C4	25.	C	U	1,5	3	E2
4.	A	U	1,5	2	D6	26.	B	H	1,5	3	E2
5.	D	U	1,5	2	D6	27.	D	U	1,5	3	F2
6.	A	U	1,5	2	C4; C5	28.	C	U	1,5	3	F1
7.	A	U	1,5	2	C5	29.	C	U	1,5	3	F4
8.	C	U	1,5	2	C8	30.	B	H	1,5	3	F3
9.	D	H	1,5	2	C6	31.	A	H	1,5	3	F6
10.	D	H	1,5	2	D7	32.	C	K	1,5	4	G7
11.	B	K	1,5	2	B1	33.	C	U	1,5	4	G8
12.	C	U	1,5	2	B1	34.	C	U	1,5	4	G11
13.	C	U	1,5	2	B1	35.	D	U	1,5	4	G13
14.	B	U	1,5	2	B1	36.	D	U	1,5	4	G11
15.	B	U	1,5	2	B1	37.	B	K	1,5	4	G1
16.	D	K	1,5	2	D2	38.	A	U	1,5	4	G1
17.	D	U	1,5	2	D3	39.	A	U	1,5	4	G2
18.	A	U	1,5	2	C1	40.	B	U	1,5	4	G3
19.	A	U	1,5	2	D3	41.	A	U	1,5	4	G3
20.	B	U	1,5	2	D3	42.	A	U	1,5	1	A1
21.	C	U	1,5	2	D1	43.	B	U	1,5	1	A1
22.	D	H	1,5	2	D4	44.	C	H	1,5	1	A1

Questions à choix multiple = 66 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	CO	RAP
1	1	U	5	2	C2
2a.	2	H	3	3	F6
2b.	3	H	2	3	F6
3.	4	U	5	3	E3
4a.	5	U	2	4	G5
4b.	6	U	1	4	G5
4c.	7	U	1	4	G5
5.	8	U	5	2	C8
6a.	9	U	1	4	G13
6b.	10	U	2	4	G13
6c.	11	U	2	4	G13
7a.	12	H	2	1	A1
7b.	13	H	3	1	A1

Questions à développement = 34 points

Questions à choix multiple = 66 (44 questions)
Questions à développement = 34 (7 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 100 points

LÉGENDE :
Q = Numéro de la question **K** = Réponse **C** = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note **S** = Note **CO** = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrit

1. Résolvez algébriquement : $\log_2 x + \log_2 (x-7) = 3$ **(5 points)**

solution

$\log_2 (x(x-7)) = 3$ ← **1 point**

$x^2 - 7x = 8$ ← **1 point**

$x^2 - 7x - 8 = 0$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

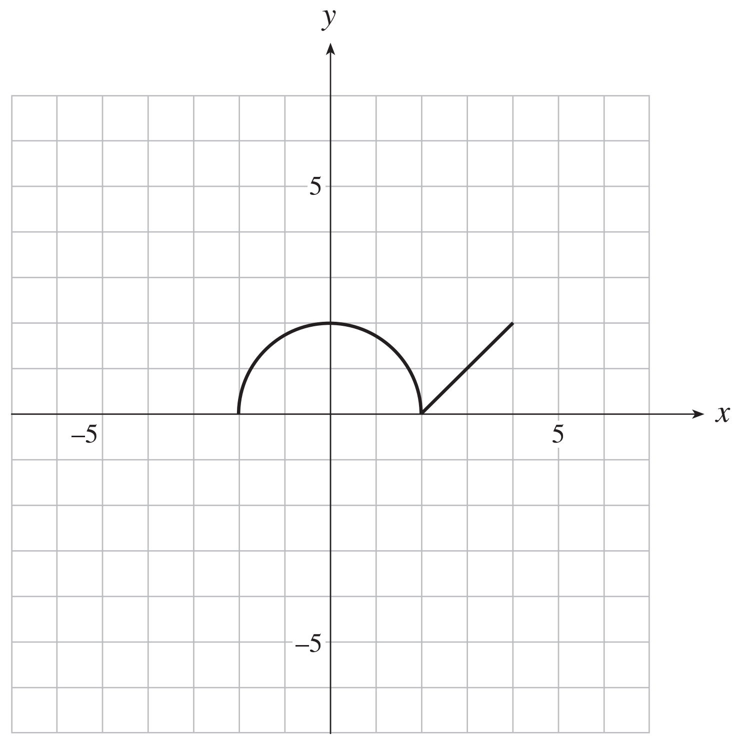
$(x-8)(x+1) = 0$

$x = 8$ $\quad$ $x = -1$ ← **$\frac{1}{2}$ point**

↑ $\quad$ à rejeter ← **1 point**

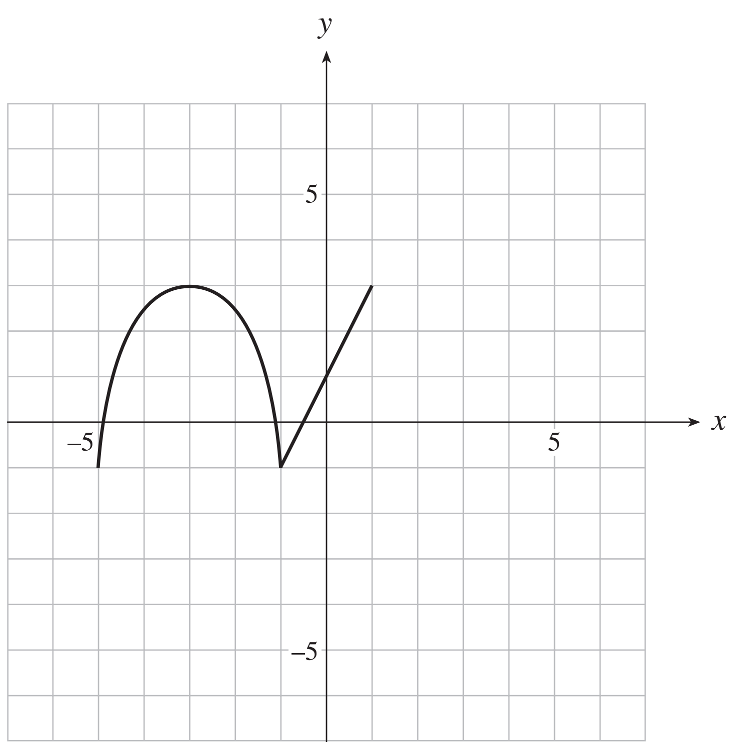
1 point

2. Le graphe de $y = f(x)$ est représenté ci-dessous.



a) Esquissez $y = 2f(x+3) - 1$ sur le graphique ci-dessous. **(3 points)**

solution

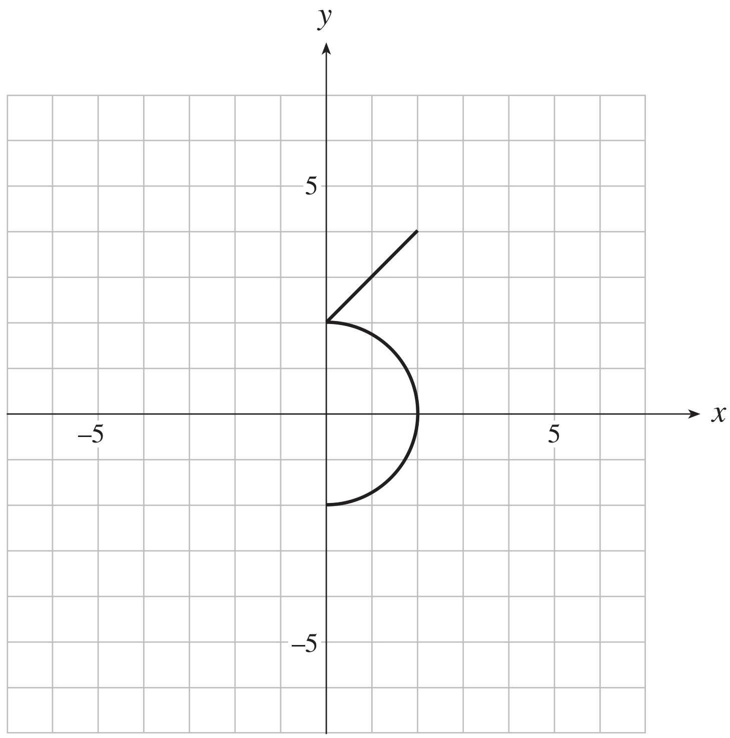


← **3 points** pour le graphe

1 point pour expansion verticale
1 point pour translation horizontale
1 point pour translation verticale

b) Esquissez le graphe de la relation inverse de $y = f(x)$. **(2 points)**

solution



← **2 points** pour le graphe

3. Transformez l'équation $4y^2+16y-9x^2+18x-29=0$ sous forme standard (canonique).

(5 points)

solution

$$4y^2+16y-9x^2+18x-29=0$$

$$4\left(y^2+4y\right)-9\left(x^2-2x\right)=29$$

$\uparrow$ **½ point** $\quad\uparrow$ **½ point** $\quad$ **½ point** $\downarrow$

$$4\left(y^2+4y+4\right)-9\left(x^2-2x+1\right)=29+16-9$$

$\uparrow$ **½ point** $\quad\uparrow$ **½ point** $\quad\uparrow$ **½ point**

$$4(y+2)^2-9(x-1)^2=36$$

$\uparrow$ **½ point** $\quad\uparrow$ **½ point**

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{(y+2)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{4}=1\\ \textbf{ou}\\ \dfrac{(x-1)^2}{4}-\dfrac{(y+2)^2}{9}=-1\end{array}\right\} \leftarrow \textbf{1 point}$$

4. Il y a 30 élèves dans une classe.

a) De combien de façons peut-on choisir 3 personnes pour former un comité à partir des 30 élèves de cette classe? **(2 points)**

solution

$$ {}_{30}C_3 = \frac{30!}{3!\ 27!} = 4\ 060 \text{ façons} $$

↑ ↑

1 point **1 point**

autre solution

$$ \frac{30 \times 29 \times 28}{3!} = \frac{24\,360}{6} = 4\ 060 \text{ façons} $$

↑ ↑

1 point **1 point**

b) De combien de façons peut-on former un comité de 3 personnes (président, vice-président et secrétaire général) à partir des élèves de cette classe? **(1 point)**

solution

$$ {}_{30}P_3 = \frac{30!}{27!} = 24\ 360 \text{ façons} $$

↑ ↑

$\frac{1}{2}$ point **$\frac{1}{2}$ point**

autre solution

$$ 30 \times 29 \times 28 = 24\,360 \text{ façons} $$

↑ ↑

$\frac{1}{2}$ point **$\frac{1}{2}$ point**

c) Si la classe comprend 10 garçons et 20 filles, de combien de façons peut-on choisir 3 personnes pour former un comité à partir des élèves de la classe, si 1 garçon et 2 filles doivent faire partie du comité? **(1 point)**

solution

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{\left({}_{10}C_1\right)\left({}_{20}C_2\right)} = (10)(190) = \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{1\,900} \text{ façons}$$

alternate solution

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{10 \times \frac{20 \times 19}{2!}} = \frac{3800}{2} = \underset{\substack{\uparrow \\ \frac{1}{2}\ \textbf{point}}}{1\,900} \text{ façons}$$

5. Prouvez l'identité : **(5 points)**

$$\sin 2x(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x) = 2$$

solution

	Côté gauche	Côté droit
	$\sin 2x(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$	2
2 points →	$= 2\sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$	$= 2$
1 point →	$= 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$	$= 2$
1 point →	$= 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$	$= 2$
1 point →	$= 2$	$= 2$

CG = CD

autre solution

	Côté gauche	Côté droit
	$\sin 2x(\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x)$	2
2 points →	$= 2\sin x\cos x\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)$	$= 2$
1 point →	$= 2\sin x\cos x\left(\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos x\sin x}\right)$	$= 2$
1 point →	$= 2\sin x\cos x\left(\frac{1}{\cos x\sin x}\right)$	$= 2$
1 point →	$= 2$	$= 2$

CG = CD

6. La probabilité de gagner une partie est de 0,7. Vous jouez 3 parties. (Répondez à toutes les parties de la question et exprimez votre réponse à au moins 3 décimales près.)

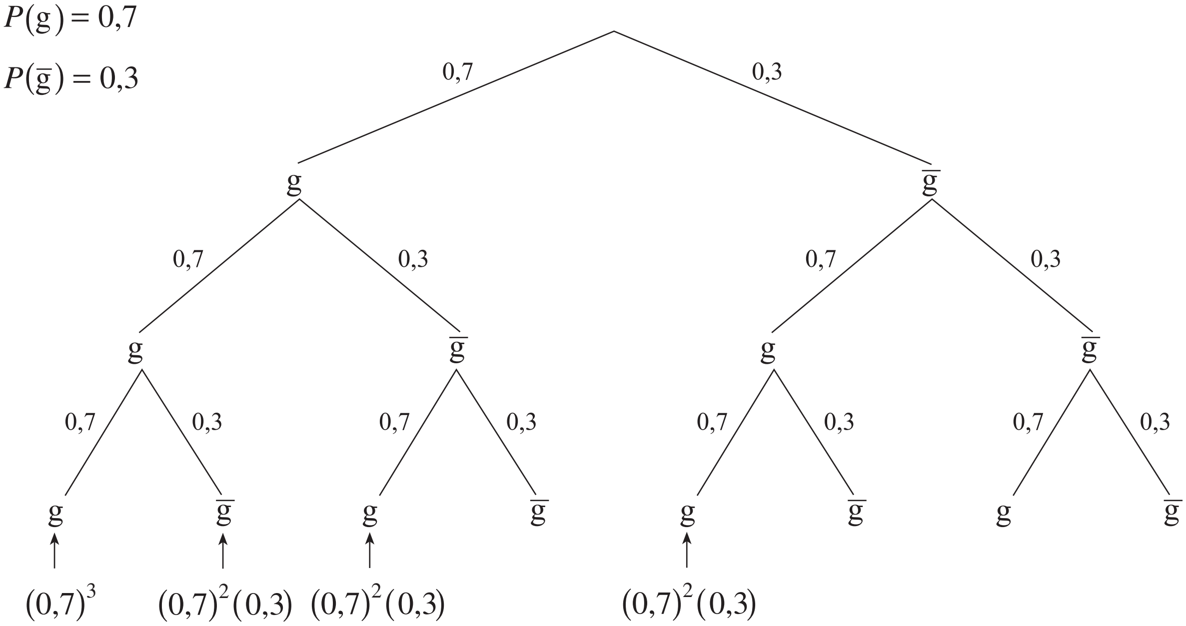
a) Quelle est la probabilité que vous gagniez toutes les 3 parties? **(1 point)**

solution

Soit g = partie gagnée

$P(\text{g}) = 0{,}7$

$P(\overline{\text{g}}) = 0{,}3$



$P(3 \text{ parties gagnées}) = (0,7)^3 = 0,343$ $\leftarrow$ **1 point**

b) Quelle est la probabilité que vous gagniez au moins deux fois? **(2 points)**

$P(\text{au moins 2 parties gagnées}) = (0,7)^3 + 3(0,7)^2(0,3) = 0,784$ $\leftarrow$ **2 points**

c) Si vous gagnez au moins deux fois, quelle est la probabilité que vous gagniez une troisième fois? **(2 points)**

$P(3 \text{ parties gagnées étant donné que vous avez déjà gagné 2 parties})$

$= \dfrac{(0,7)^3}{(0,7)^3 + 3(0,7)^2(0,3)}$ $\leftarrow$ **1 point**

$= 0,438$ ou $0,4375$ $\leftarrow$ **1 point**

6. La probabilité de gagner une partie est de 0,7. Vous jouez 3 parties. (Répondez à toutes les parties de la question et exprimez votre réponse à au moins 3 décimales près.)

a) Quelle est la probabilité que vous gagniez toutes les 3 parties? **(1 point)**

autre solution 1

Soit A = 3 parties gagnées
Soit B = au moins 2 parties gagnées

$P(\text{A}) = (0,7)^3 = 0,343$ $\leftarrow$ **1 point**

b) Quelle est la probabilité que vous gagniez au moins deux fois? **(2 points)**

$$\begin{aligned} P(\text{B}) &= (0,7)^3 + 3(0,7)^2(0,3)^1 \quad \leftarrow \textbf{2 points} \\ &= 0,784 \end{aligned}$$

c) Si vous gagnez au moins deux fois, quelle est la probabilité que vous gagniez une troisième fois? **(2 points)**

$$P(\text{A}|\text{B}) = \frac{P(\text{A et B})}{P(\text{B})} = \underbrace{\frac{P(\text{A})}{P(\text{B})} = \frac{0,343}{0,784}}_{\textbf{1 point pour l'une ou l'autre}} = \underset{\uparrow\ \textbf{1 point}}{0,4375}$$

6. La probabilité de gagner une partie est de 0,7. Vous jouez 3 parties. (Répondez à toutes les parties de la question et exprimez votre réponse à au moins 3 décimales près.)

a) Quelle est la probabilité que vous gagniez toutes les 3 parties? **(1 point)**

autre solution 2

Soit A = 3 parties gagnées
Soit B = au moins 2 parties gagnées

$P(\text{3 parties gagnées}) = \text{binompdf}\ (3;\ 0,7;\ 3) = 0,343$ $\leftarrow$ **1 point**

b) Quelle est la probabilité que vous gagniez au moins deux fois? **(2 points)**

$$P(0;\ \text{1 partie gagnée}) = \text{binomcdf}\ (3;\ 0,7;\ 1)$$

$P(\text{au moins 2 parties gagnées}) = 1 - \text{binomcdf}\ (3;\ 0,7;\ 1) = 0,784$ $\leftarrow$ **2 points**

c) Si vous gagnez au moins deux fois, quelle est la probabilité que vous gagniez une troisième fois? **(2 points)**

$$P(\text{exactement 3 parties gagnées} \mid \text{au moins 2 parties gagnées})$$

1 point $\rightarrow$ $= \dfrac{\text{binompdf}\ (3;\ 0,7;\ 3)}{1 - \text{binomcdf}\ (3;\ 0,7;\ 1)}$

1 point $\rightarrow$ $= 0,438$

7. La société Bouchard et Brébœuf a sondé 400 habitants de la Colombie-Britannique choisis au hasard. Elle a découvert que 20 % des 400 répondants avaient un téléphone cellulaire.

   a) Déterminez l'erreur type pour la proportion de l'échantillon. **(2 points)**

solution

$n = 400 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}$ **point**

$\hat{p} = 0,20 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}$ **point**

$\hat{q} = 0,80$

$$\text{Erreur type} = \sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$$

$$\text{Erreur type} = \sqrt{\frac{(0,20)(0,80)}{400}} \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$= 0,02 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

b) Utilisez les résultats de cet échantillon pour déterminer un intervalle de confiance de 95 % pour la proportion réelle d'habitants de la Colombie-Britannique ayant un téléphone cellulaire. Indiquez clairement la substitution dans la formule de l'intervalle de confiance. **(3 points)**

solution

$$\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} < p < \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \qquad \textbf{1 point} \text{ pour } z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

$$\tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \rightarrow \left\{ 0,20 - 1,96\sqrt{\frac{(0,8)(0,2)}{400}} < p < 0,20 + 1,96\sqrt{\frac{(0,8)(0,2)}{400}} \right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0,16 < p < 0,24 \\ \text{ou} \\ 16\ \% < p < 24\ \% \end{array} \right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

autre solution

1 point pour $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$\tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \rightarrow \left\{ 0,20 - 1,96(\text{SE}) < p < 0,20 + 1,96(\text{SE}) \right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$0,20 - 1,96(0,02) < p < 0,20 + 1,96(0,02)$$

$$\tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 0,16 < p < 0,24 \\ \text{ou} \\ 16\ \% < p < 24\ \% \end{array} \right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

Notez: Si les élèves écrivent invNorm (0,975) pour $z_{\frac{\alpha}{2}}$ dans la formule, ceci est correct.
Si les élèves écrivent $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,959963986$, ceci est aussi correct.

Notez: Puisque la précision sur le nombre de décimales exige que les réponses soient arrondies à la deuxième décimale près, la réponse ci-dessus a été arrondie à la deuxième décimale. Une plus grande précision dans le nombre de décimales, comme $0,1608 < p < 0,2392$, est aussi acceptable.

FIN DE CORRIGÉ