Principes de mathématiques 12

Examen provincial – Juin 2000

CORRIGÉ / BARÈME DE NOTATION

PROGRAMME D'ÉTUDES :

Composantes	**Domaines**
1. La résolution de problèmes	A Série de problèmes
2. Les relations et les représentations	B Suites et séries C Fonctions polynomiales D Fonctions logarithmiques et exponentielles E Relations quadratiques F Systèmes quadratiques
3. Le plan et l'espace	G Trigonométrie H Géométrie

Partie A : Questions à choix multiple

Q	K	C	CO	RAP	Q	K	C	CO	RAP
1.	D	U	2	C5	24.	C	U	2	B4
2.	D	K	2	C1	25.	D	U	2	B2
3.	C	U	2, 1	C6, A7	26.	B	U	2	B4
4.	B	H	2	C9, C1	27.	D	H	2	B4
5.	D	H	2, 1	C1, A7	28.	C	H	2	B6, D5
6.	D	K	2	E5	29.	A	K	3	G5
7.	B	U	2	E2	30.	C	K	3	G5
8.	A	U	2	F4	31.	B	U	3	G5
9.	B	U	2	F1	32.	B	U	3	G1
10.	A	U	2	F1	33.	C	U	3	G3
11.	A	U	2	E6	34.	D	U	3	G3
12.	B	H	2	E4	35.	B	U	3, 1	G3, A7
13.	D	H	2	E5	36.	C	H	3	G5
14.	A	K	2	D4	37.	B	H	3	G10
15.	C	U	2	D5	38.	A	H	3	G9
16.	A	U	2	D2	39.	D	U	3	H2
17.	C	U	2	D5	40.	C	U	3	H1, H2
18.	A	U	2	D5	41.	D	U	3	H1, H2
19.	B	H	2	D1	42.	D	H	3	H4
20.	D	H	2	D5	43.	B	U	1	A3
21.	A	K	2	B1	44.	C	U	1	A3
22.	C	U	2	B2	45.	B	H	1	A3
23.	B	U	2	B5					

Questions à choix multiple = 45 points

Partie B : Questions à développement

Q	B	C	S	CO	RAP
1.	1	U	3	2	F3
2.	2	U	3	2, 1	C4, C6, A7
3.	3	U	3	2, 1	D2, A7
4.	4	U	3	2	E7
5.	5	U	3	3	G8
6.	6	U	3	3	H4
7.	7	H	3	1	A3
8.	8	U	4	3	H2

Questions à développement = 25 points

Questions à choix multiple = 45 (45 questions)
Questions à développement = 25 (8 questions)
TOTAL DE L'EXAMEN = 70 points

LÉGENDE :

Q = Numéro de la question
K = Réponse
C = Niveau cognitif
B = Numéro de la case de note
S = Note
CO = Composante du programme d'études
RAP = Résultat d'apprentissage prescrits

PARTIE B : QUESTIONS À DÉVELOPPEMENT

Valeur : 25 points **Durée suggérée : 45 minutes**

DIRECTIVES : On a incorporé l'espace pour le travail au brouillon dans l'espace alloué pour répondre à chaque question. Vous n'aurez peut-être pas besoin de tout l'espace qu'on vous a laissé pour répondre à chaque question. Lorsqu'on vous le demande, écrivez la réponse finale à la question dans l'espace prévu à cet effet.

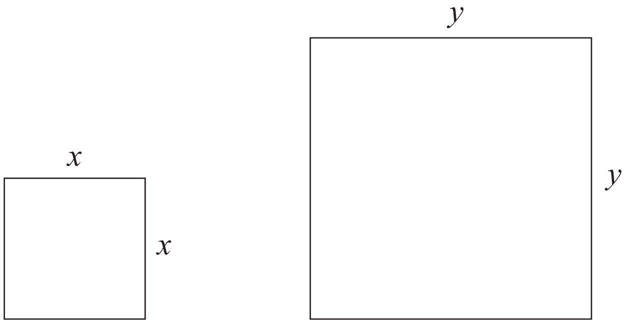
Si, dans une justification, vous faites référence à de l'information fournie par la calculatrice, cette information doit être présentée clairement dans la réponse. Par exemple, si vous utilisez un graphe pour résoudre un problème, il est important de tracer le graphe, en montrant sa forme générale et en indiquant les dimensions appropriées de la fenêtre.

Lorsque vous vous servez de la calculatrice, vous devez fournir une réponse en décimales, qui est précise à **au moins 2 décimales près** (à moins qu'on vous indique autre chose). Vous ne devez arrondir votre réponse **seulement** à l'étape finale de la solution.

On n'accordera PAS le nombre maximal de points pour une réponse finale seule.

1. Résolvez algébriquement le problème suivant. **(3 points)**

La somme des aires de deux carrés séparés est égale à $234\ \text{cm}^2$. La somme des deux périmètres est de 72 cm. Déterminez la mesure des côtés de chaque carré.



Solution

$$x^2 + y^2 = 234 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$4x + 4y = 72 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\therefore\ x + y = 18$$

$$y = 18 - x$$

$$x^2 + (18 - x)^2 = 234 \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$x^2 + 324 - 36x + x^2 = 234$$

$$\left.\begin{aligned} 2x^2 - 36x + 90 &= 0 \\ x^2 - 18x + 45 &= 0 \end{aligned}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$(x - 15)(x - 3) = 0$$

$$\begin{array}{cc} x = 15 & x = 3 \\ \downarrow & \\ y = 3 & y = 15 \end{array}$$

$\therefore$ les longueurs des côtés sont 15 cm et 3 cm

↑ ↑

$\tfrac{1}{2}$ **point** $\tfrac{1}{2}$ **point**

2. Lorsque $2x^3 - 8x^2 + kx + 18$ est divisé par $x + 2$, le reste est –14. Trouvez k, et utilisez ensuite une calculatrice graphique pour trouver toutes les racines réelles de $2x^3 - 8x^2 + kx + 18 = 0$.
(**Remarque** : Il n'est pas nécessaire de dessiner la fenêtre de la calculatrice.) **(3 points)**

Solution

Le reste de $\left(2x^3 - 8x^2 + kx + 18\right) \div (x + 2)$ est -14

$$\overbrace{2(-2)^3 - 8(-2)^2 + k(-2)}^{\frac{1}{2}\textbf{ point}} + 18 = \overset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{-14}$$

$$-16 + -32 - 2k + 18 = -14$$

$$-2k = 16$$

$$k = -8 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

OU

$$\begin{array}{r|rrrr} \overset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{-2} & 2 & -8 & k & 18 \\ & & -4 & 24 & -2k - 48 \\ \hline & 2 & -12 & k + 24 & -2k - 30 \end{array}$$

$$-2k - 30 = -14 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

$$-2k = 16$$

$$k = -8 \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

$$2x^3 - 8x^2 - 8x + 18 = 0$$

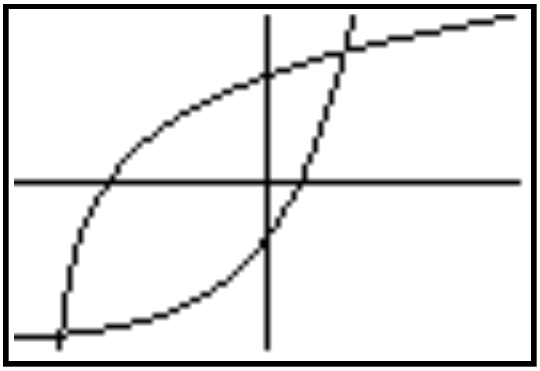
$$x = \underset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{-1{,}66}\ ; \quad \underset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{1{,}22}\ ; \quad \underset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{4{,}44}$$

3. Résolvez le système suivant à l'aide d'une calculatrice graphique. **(3 points)**

$$y = \log_2(x+4)$$
$$y = 2^{x+1} - 3$$

Tracez le graphe dans la fenêtre d'affichage ci-dessous. Écrivez la ou les fonctions que vous avez inscrites dans la calculatrice pour obtenir votre graphe et votre solution. Indiquez les dimensions de la fenêtre d'affichage en montrant une portion suffisante du graphe afin que les éléments caractéristiques de la ou des fonctions ainsi que tous les points d'intersection soient visibles.

Solution



$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \frac{\log(x+4)}{\log(2)} \\ Y_2 &= 2^{x+1} - 3 \end{aligned}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \text{ pour les équations}$$

← $\frac{1}{2}$ **point** pour le graphe

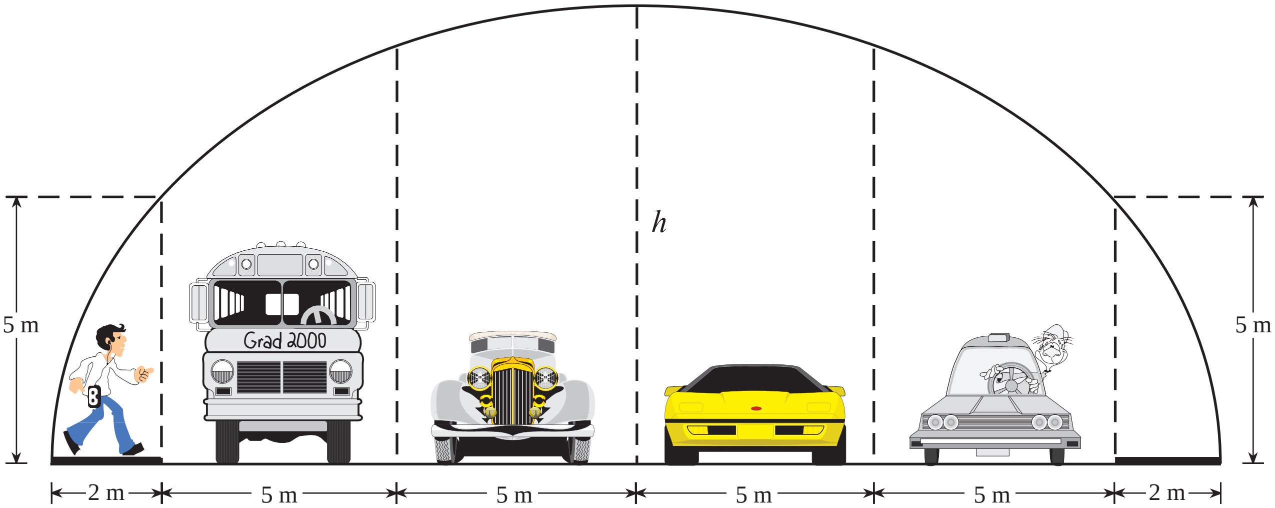
$x\ [-4,7;\ 4,7]$ $y\ [-3,1;\ 3,1]$ ← $\frac{1}{2}$ **point** pour les dimensions de la fenêtre

Donc la solution du système est :

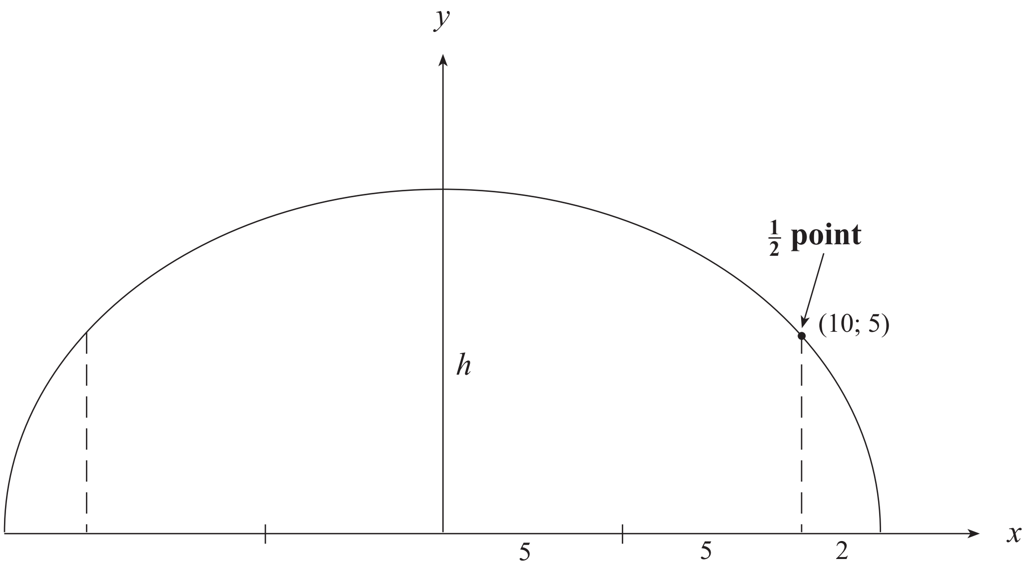
$(1,44;\ 2,44)$ $(-3,86;\ -2,86)$ ← **$1\frac{1}{2}$ point**

4. La forme d’un tunnel est semi-elliptique. Le tunnel contient quatre voies de 5 m de largeur et deux trottoirs de 2 m de largeur comme indiqué sur le schéma ci-dessous. La hauteur du tunnel est de 5 m à la verticale du bord des trottoirs. Déterminez la hauteur maximale, h, du tunnel.

(3 points)



Solution



$\frac{1}{2}$ point équation

$\frac{1}{2}$ point → $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$

$\frac{1}{2}$ point

↓

$$\frac{10^2}{12^2} + \frac{5^2}{h^2} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{25}{h^2} &= 1 - \frac{100}{144} \\ \frac{25}{h^2} &= \frac{11}{36} \\ h^2 &= \frac{(36)(25)}{11} \\ &= 81,81 \end{aligned}\right\} \textbf{$\frac{1}{2}$ point}$$

$h = 9,05$ m ← **$\frac{1}{2}$ point**

5. Prouvez l’identité : **(3 points)**

$$\frac{1}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta} \qquad = \qquad \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

Solution

$$\frac{1}{\sec\theta+\operatorname{tg}\theta} \qquad = \qquad \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

Côté gauche

Côté droit

$$= \left.\frac{\left(\qquad 1 \qquad\right)}{\left(\frac{1}{\cos\theta}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)}\frac{\cos\theta}{\cos\theta}\right\} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$\tfrac{1}{2}\ \textbf{point} \rightarrow = \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)}\ \frac{(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

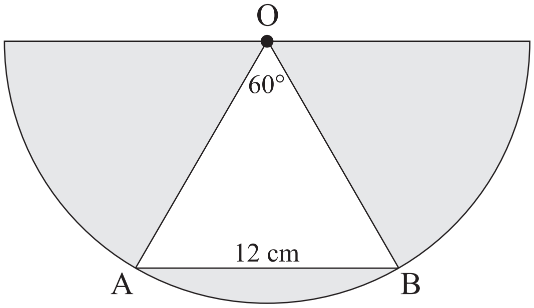
$$= \frac{\cos(1-\sin\theta)}{1-\sin^2\theta} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$= \frac{\cos(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta} \leftarrow \tfrac{1}{2}\ \textbf{point}$$

$$= \frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}$$

CG = CD

6. Soit un demi-cercle de centre O, $\angle AOB = 60°$ et $AB = 12$ cm. Déterminez l'aire de la région en gris. **(3 points)**



Solution

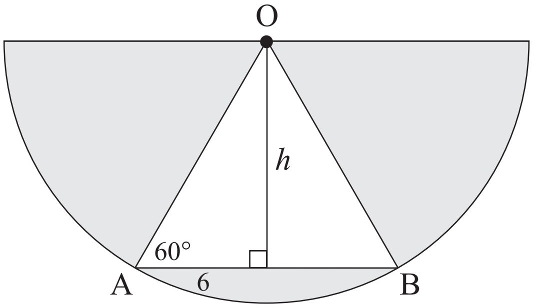
1 point →

$$\text{puisque } AO = OB\,,\ \angle A = \angle B$$

$$\text{donc } \angle A = \angle B = 60°\,,\ \text{alors } AO = 12$$

$$\frac{h}{6} = \text{tg}60°$$

$$h = 10,3923$$



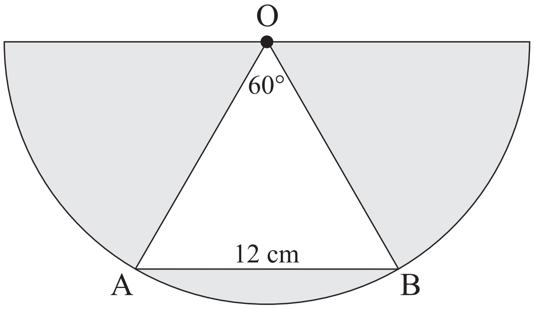
$\frac{1}{2}$ point → $\therefore\ \text{aire}_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(12)10,3923 = 62,3538$

1 point → $\therefore\ \text{aire}_{\text{en gris}} = \frac{\pi(12)^2}{2} - 62,3538 = 163,84$

$\frac{1}{2}$ point → $\therefore$ aire de région en gris est $163,84\,\text{cm}^2$

$\left(\text{Réponse exacte : } 72\pi - 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2\right)$

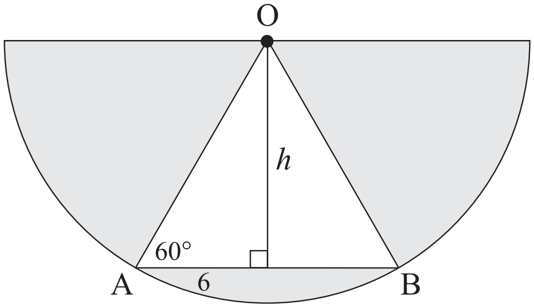
6. Soit un demi-cercle de centre O, $\angle AOB = 60°$ et $AB = 12$ cm. Déterminez l'aire de la région en gris. **(3 points)**



Autre solution

1 point →

$$\left\{\begin{array}{l} \text{puisque } AO = OB,\ \angle A = \angle B \\ \quad \text{donc } \angle A = \angle B = 60°,\ \text{alors } AO = 12 \\ \quad \therefore\ 6^2 + h^2 = 12^2 \\ \qquad\qquad h = 10{,}3923;\ 6\sqrt{3};\ \sqrt{108} \end{array}\right.$$



$\frac{1}{2}$ point → $\therefore\ \text{aire}_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}(12)10{,}3923 = 62{,}3538$

1 point → $\therefore\ \text{aire}_{\text{en gris}} = \frac{\pi(12)^2}{2} - 62{,}3538 = 163{,}84$

$\frac{1}{2}$ point → $\therefore$ aire de région en gris est $163{,}84\ \text{cm}^2$

$\left(\text{Réponse exacte : } 72\pi - 36\sqrt{3}\ \text{cm}^2\right)$

7. Exprimez y en fonction de x et indiquez toutes les contraintes sur les variables x et y.

(3 points)

$$\frac{1}{\log_y 3} = \log_{\frac{1}{3}} 27 + 2\log_3 x$$

Solution

$$\frac{1}{\log_y 3} = \log_{\frac{1}{3}} 27 + 2\log_3 x$$

$$\overset{\overset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{\downarrow}}{\boxed{\frac{1}{\frac{\log 3}{\log y}} = \frac{\log y}{\log 3} = \log_3 y}} = \overset{\overset{\frac{1}{2}\textbf{ point}}{\downarrow}}{\boxed{-\log_3 27}} + \log_3 x^2 \xrightarrow{\textit{aussi}} \boxed{\begin{array}{l} \log_3 \frac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = \log_3 27^{-1} = -\log_3 27 \\ = -\log_3 3^3 = -3 = \frac{\log 27}{-\log 3} = -3\log_3 3 \end{array}}$$

$$\log_3 y = \log_3\left(\frac{x^2}{27}\right) \quad \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

$$y = \frac{x^2}{27} \qquad \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

$$y > 0\,, \quad y \neq 1 \qquad \} \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

$$x > 0 \qquad \} \leftarrow \tfrac{1}{2}\textbf{ point}$$

(**Remarque** : Il n’est pas nécessaire que l’élève stipule que $x \neq \sqrt{27}$)

Les élèves doivent choisir entre l'une ou l'autre présentation de leur preuve.

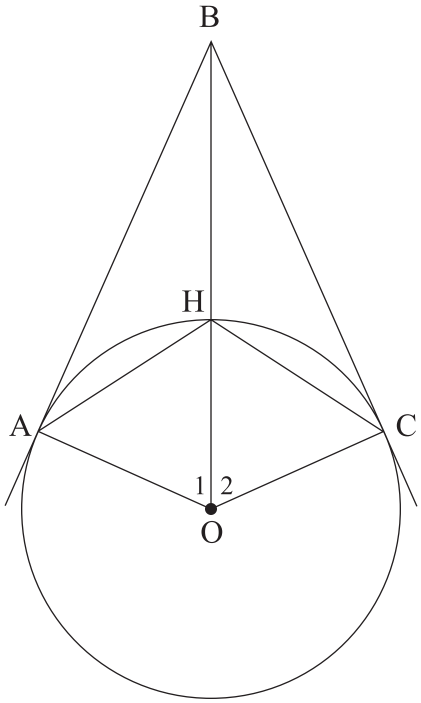
8. Complétez la preuve. **(4 points)**

Légende : O est le centre
B, H, O sont collinéaires

Données : AB et CB sont des tangentes

Prouvez : AH = CH

Remarque : On encourage l'élève à se servir de chiffres pour désigner les angles.



Solution

Présentation de la preuve sous forme de paragraphe :

Puisque O est le centre, AO = CO parce que les rayons = .

Puisque AB et CB sont des tangentes, BA = BC car des tangentes issues d'un point extérieur sont = .

Côté commun BO, alors $\Delta BAO \cong \Delta BCO$ par CCC. Donc $\angle 1 = \angle 2$.

Donc, AH = CH car ce sont des cordes d'angles au centre égaux.

Les élèves doivent choisir entre l’une ou l’autre présentation de leur preuve.

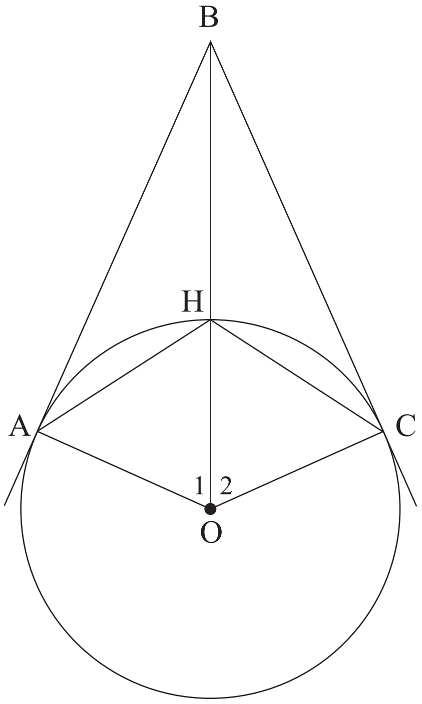
8. Complétez la preuve. **(4 points)**

Légende : O est le centre
B, H, O sont collinéaires

Données : AB et CB sont des tangentes

Prouvez : AH = CH

Remarque : On encourage l’élève à se servir de chiffres pour désigner les angles.



Autre solution 1

Présentation de la preuve sous forme de paragraphe :

Puisque AB et CB sont des tangentes, BA = BC car des tangentes issues d’un point extérieur sont =, et ∠BAO = ∠BCO = 90°

car tangente ⊥ au rayon et OA = OC puisque les rayons sont égaux.

Donc, ΔBAO ≅ ΔBCO par CAC, et ∠1 = ∠2.

Donc, AH = CH car ce sont des cordes d’angles au centre égaux.

Les élèves doivent choisir entre l'une ou l'autre présentation de leur preuve.

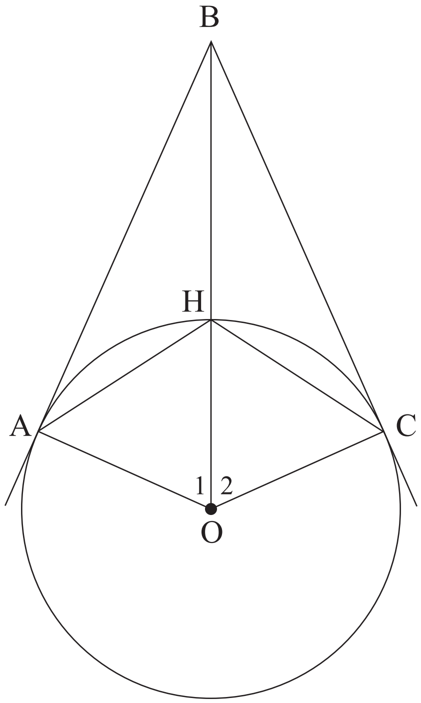
8. Complétez la preuve. **(4 points)**

Légende : O est le centre
B, H, O sont collinéaires

Données : AB et CB sont des tangentes

Prouvez : AH = CH

Remarque : On encourage l'élève à se servir de chiffres pour désigner les angles.



Autre solution 2

Présentation de la preuve sous forme de paragraphe :

Puisque AB et CB sont des tangentes, BA = BC car des tangentes issues d'un point extérieur sont = .

AO = CO car les rayons sont = et $\angle BAO = \angle BCO = 90°$ car les tangentes sont perpendiculaires au rayon. Alors $\Delta BAO \cong \Delta BCO$ par CAC.

Puisque $\angle 1 = \angle 2$ et OH est un côté commun, alors $\Delta AHO \cong \Delta CHO$ par CAC.

Donc AH = CH.

Les élèves doivent choisir entre l'une ou l'autre présentation de leur preuve.

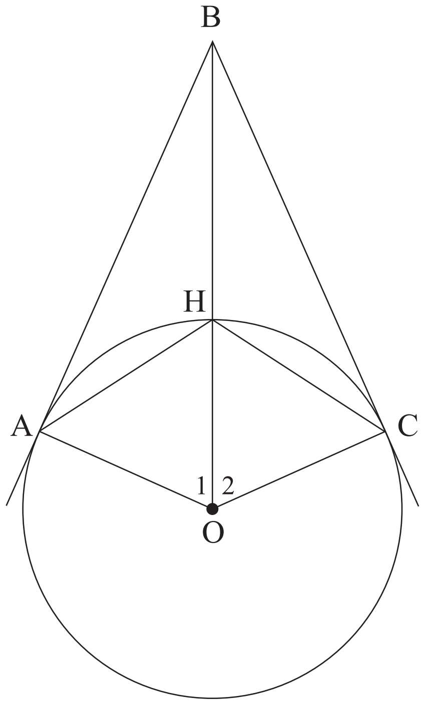
8. Complétez la preuve. **(4 points)**

Légende : O est le centre
B, H, O sont collinéaires

Données : AB et CB sont des tangentes

Prouvez : AH = CH

Remarque : On encourage l'élève à se servir de chiffres pour désigner les angles.



Solution

Présentation de la preuve à deux colonnes :

	Énoncé	Raison
	joindre AO et CO	construction
	AB et CB sont des tangentes	donnée
2 points →	$\angle BAO = \angle BCO = 90°$	tangente ⊥ rayon
	BA = BC	tangentes d'un point extérieur sont =
	AO = CO	rayons =
$\frac{1}{2}$ point →	$\Delta BAO \cong \Delta BCO$	CAC
$1\frac{1}{2}$ point →	$\angle 1 = \angle 2$	ECTCC
	AH = CH	cordes tendues pour des angles au centre égaux sont égales

Les élèves doivent choisir entre l'une ou l'autre présentation de leur preuve.

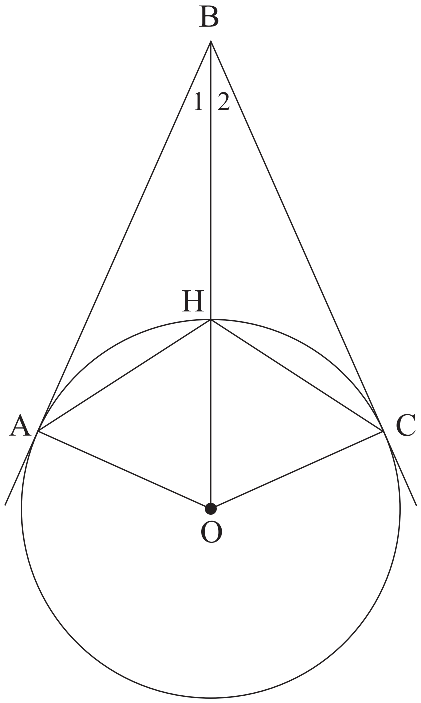
8. Complétez la preuve. **(4 points)**

Légende : O est le centre
B, H, O sont collinéaires

Données : AB et CB sont des tangentes

Prouvez : AH = CH

Remarque : On encourage l'élève à se servir de chiffres pour désigner les angles.



Autre solution

Présentation de la preuve à deux colonnes :

Énoncé	Raison
joindre AO et CO	construction
AB et CB sont des tangentes	donnée
BA = BC	tangentes d'un point extérieur sont =
AO = CO	rayons =
BO = BO	même côté
ΔABO ≅ ΔCBO	CCC
∠1 = ∠2	ECTCC
BH = BH	même côté
ΔBHA ≅ ΔBHC	CAC
AH = CH	ECTCC

FIN DU CORRIGÉ